Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe Donnerstag 05.07.2018**

(1) (a) Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, daß alle Normen auf E aequivalent sind (d.h. dass zu beliebigen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E Zahlen $c, C > 0$ existieren mit $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$).

(Hinweis: Sie können (Warum?) ohne Einschränkung annehmen, daß $E = \mathbb{C}^N$ und $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j|$ gilt. Dann ist eine Ungleichung einfach. Zum Beweis der anderen Ungleichung nutzen Sie (Wie?) die Kompaktheit der Einheitskugel in $\mathbb{C}^N$ bzgl. $\|\cdot\|_1$.)

(b) Sei E der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf E definiert durch

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \text{ und } \|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Zeigen Sie, dass es kein $C > 0$ gibt mit $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\|_1$.

(2) Zeigen Sie: Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{C}$.

(a) Ist $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linear (über $\mathbb{C}$), so ist $u := \Re\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear (über $\mathbb{R}$) mit $\varphi(x) = u(x) - iu(ix)$ fuer alle $x \in E$.

(b) Ist $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear (über $\mathbb{R}$), so ist $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi(x) = u(x) - iu(ix)$, linear über $\mathbb{C}$ mit $\Re\varphi = u$.

(3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $X_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, meßbar mit endlichem Maß, mit $X = \cup_n X_n$. Sei L_0 der Vektorraum der beschränkten meßbaren Funktionen auf X, die ausserhalb eines X_n verschwinden. Zeigen Sie, daß L_0 dicht in $L^p(X, \mu)$ ist fuer jedes $p \in [1, \infty)$.

(4) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(t) =: f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Es sei

$$\omega(t, \delta) := \sup\{|f(s_1) - f(s_2)| : |s_i - t| \leq \delta\},$$

$$\omega(t) := \inf_{\delta>0} \omega(t, \delta)$$

und

$$U_\epsilon := \{t \in \mathbb{R} : \omega(t) < \epsilon\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $\epsilon > 0$ ist U_ϵ offen.

(b) Für alle $\epsilon > 0$ ist U_ϵ dicht.
Anleitung: Betrachten Sie $B_\epsilon := \mathbb{R} \setminus U_\epsilon$ und nehmen Sie an, dass B_ϵ ein abgeschlossenes Intervall J mit nichtleeren Inneren enthält. Sei

$$E_n = \bigcap_{i,j \geq n} \{t \in J : |f_i(t) - f_j(t)| \leq \frac{\epsilon}{3}\}.$$

Zeigen Sie, dass es ein n_0 gibt, so dass die Menge E_{n_0} ein nichttriviales Intervall I enthält. Dies führt zum Widerspruch $I \cap U_\epsilon \neq \emptyset$.

(c) Die Menge der Stetigkeitsstellen von f ist eine dichte G_δ-Menge.

Zusatzaufgabe. Zeigen Sie, daß die Menge der stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine dichte G_δ-Menge enthält.

Hinweis. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U_n := \{f \in C([0,1]) : \sup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \frac{|f(x) - f(x+h)|}{h} > n \text{ für alle } x \in [0,1])\}$$

und zeigen Sie, daß U_n eine dichte G_δ-Menge ist.