Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Dienstag 10.01.2012**

(1) Sei das Semiskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für riemannintegrierbare Funktionen $f,g:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ durch $\langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)dx$ definiert. Zeigen Sie, dass die Funktionen $s_k : x\mapsto \sin kx$, $k\in\mathbb{N}$, $c_k : x\mapsto\cos kx$, $k\in\mathbb{N}_0$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthogonal sind; genauer

$$\langle s_k,c_l\rangle = 0,\quad \langle s_k,s_l\rangle = \begin{cases}\frac{1}{2} & : k=l,\\ 0 & : \text{sonst},\end{cases}\quad \langle c_k,c_l\rangle = \begin{cases}1 & : k=l=0,\\ \frac{1}{2} & : k=l\neq 0,\\ 0 & : \text{sonst}.\end{cases}$$

(2) Sei die 2π-periodische Funkion $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ gegeben durch

$$f(2\pi k+x) = \begin{cases}0 & : 0\leq x<\pi,\\ 1 & : \pi\leq x<2\pi,\end{cases}$$

wobei $k\in\mathbb{Z}$ und $x\in[0,2\pi)$.

a.) Man bestimme die Fourierreihe von f (im Wesentlichen eine reine Sinusreihe).

b.) Mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung zeige man

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(3) Zeigen Sie: Für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}.$$

Tipp: Benutzen Sie die Formel $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})$.

(4) Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten $c_k(f)$, $k\in\mathbb{Z}$ von 2π-periodischen Riemann integrierbaren Funktionen für $k\to\infty$ gegen 0 streben. Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für charakteristische Funktionen und Treppenfunktionen.

Zusatzaufgaben

(Z) Zeigen Sie für $0 < x < 2\pi$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

und dass die Konvergenz für jedes $\delta > 0$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig ist.