Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Mittwoch 16.06.2010**

(1) Sei E ein Vektorraum und $A \subset E$ absorbierend und absolut konvex. Zeigen Sie, dass das Minkowski Funktional p_A eine Halbnorm ist.

(2) Sei $\mathcal{P}$ eine Familie von Halbnormen. Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{P}$ erzeugte schwache Topologie und die von $\mathcal{P}$ erzeugte Vektorraumtopologie im allgemeinen nicht übereinstimmen.

(3) Zeigen Sie, dass eine Folge genau dann universell ist, wenn sie schließlich konstant ist.

(4) Sei (a_n) eine reelle Folge, $1 \leq p < \infty$ und sei $A \subset \ell^p$ definiert durch

$$A = \{(x_n) \in \ell^p : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n|^p \leq 1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) A ist absolut konvex

(b) A ist absorbierend genau dann wenn $(a_n) \in \ell^\infty$

Berechnen Sie zu gegebenen $(a_n) \in \ell^\infty$ das zugehörige Minkowski Funktional.

Zusatzaufgabe

Ein normierter Raum E heißt gleichmäßig konvex, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in E$ gilt

$$\|x\|, \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| \geq \epsilon \ \Rightarrow \|\tfrac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta.$$

Zeigen Sie, dass dies äquivalent zu

$$\|x_n\|, \|y_n\| \leq 1, \|\tfrac{x_n+y_n}{2}\| \to 1 \ \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0$$

ist.

Sei $A \subset E$ konvex und vollständig. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in E$ genau eine Bestapproximation in A gibt.