Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Donnerstag 03.05.2018**

(1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Folge $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichung $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ verschwindet μ-fast überall.

(ii) Für ein $p \geq 1$ gilt $\int_X |f|^p \, d\mu = 0$.

(iii) Für alle $p \geq 1$ gilt $\int_X |f|^p \, d\mu = 0$.

(2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Gegeben seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu \; = \; \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$$

gilt.

(3) Für $0 < p \leq \infty$ definieren wir die Abbildung $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ durch

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 0 < p < \infty, \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{falls } p = \infty, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Zeichnen Sie die Mengen

$$B_1^{(p)}(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \|(x,y)\|_p \leq 1\}$$

für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$.

(ii) Zeigen Sie, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichheit

$$\|(x,y)\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|(x,y)\|_p$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass für $0 < p < 1$ die Abbildung $\| \cdot \|_p$ keine Norm ist.

(4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\| \cdot \|_1 : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow [0, \infty), f \mapsto \int |f| d\mu,$$

genau dann eine Norm ist, wenn $\mu(A) > 0$ fuer jede messbare Menge A mit $A \neq \emptyset$ gilt.