Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 9 **Abgabe: 17.12.2018**

(1) Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Für eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$, definieren wir auf TM die Funktion

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \left(p, \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \mapsto (\varphi(p), \xi^1, \ldots, \xi^n).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen: Statten wir TM mit der von

$$\{\widetilde{\varphi}^{-1}(O) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D} \text{ und } O \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ offen}\}$$

erzeugten Topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ aus (der von den Abbildungen $\widetilde{\varphi}, \varphi \in \mathcal{D}$, induzierten Initialtopologie), so ist $(TM, \widetilde{\mathcal{T}})$ eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}\}$$

ist ein glatter Atlas, der eine glatte Struktur $\widetilde{\mathcal{D}}$ auf TM erzeugt. Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann glatt, wenn $X : M \to (TM, \widetilde{\mathcal{D}})$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist. Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann messbar, wenn die Abbildung $X : M \to TM$ Borel-messbar ist.

Erinnerung: Es ist $\pi : TM \to M$ die Projektion $\pi((p, \xi)) = p$ für $p \in M$, $\xi \in T_pM$.

(2) Es sei (M, g, μ) eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass für alle $1 \leq p \leq \infty$ der Raum $(\vec{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ vollständig ist.

(3) Es sei (M, g, μ) eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\mathrm{div}_\mu U_X = u_{\mathrm{div}_\mu X}$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) $\nabla u_f = U_{\nabla f}$ für $f \in C^\infty(M)$.

(c) $\Delta_\mu u = (\mathrm{div}_\mu \circ \nabla) u$ für $u \in \mathcal{D}'(M)$.

In diesem Sinne setzen die Operatoren $\Delta_\mu : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$, $\mathrm{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$ und $\nabla : \mathcal{D}'(M) \to \vec{\mathcal{D}}'(M)$ ihre Varianten auf glatten Funktionen fort.

Erinnerung: Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ ist $u_f \in \mathcal{D}'(M)$ definiert durch

$$(u_f, \varphi) = \int_M f\varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{D}(M),$$

und für $X \in \vec{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ ist $U_X \in \vec{\mathcal{D}}'(M)$ definiert durch

$$(U_X, \omega) = \int_M \langle X, \omega \rangle d\mu, \quad \omega \in \vec{\mathcal{D}}(M).$$

(4) Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiterhin seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi \in C^\infty(M)$. Beweisen Sie

$$\mathrm{div}_\mu(\varphi X) = \langle \nabla \varphi, X \rangle + \varphi \,\mathrm{div}_\mu X.$$

Nutzen Sie diese Formel um Folgendes zu zeigen: $u \in W^1_{\mathrm{loc}}(M, \mu)$ impliziert $\varphi u \in W^1_{\mathrm{loc}}(M, \mu)$ und es gilt

$$\nabla(\varphi u) = \varphi \nabla u + u \nabla \varphi.$$