

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 3**Abgabe: Donnerstag 21.5.2010**

(1) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} + \exp\left(-\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 0.$$

(2) Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y + x(1 - r^2)/r \\ x + y(1 - r^2)/r \end{pmatrix}, \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a.) Beweisen Sie: Die Lösung $v(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \infty)$ ist beschränkt.

b.) Skizzieren Sie das Vektorfeld der Differentialgleichung.

(3) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2x + \cos(x + y)}{\cos(x + y)}.$$

a.) Warum existiert zu dieser DGL eine Stammfunktion?

b.) Lösen Sie die DGL mittels einer Stammfunktion.

(4) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{xy^3}{1 + 2x^2y^2}, \quad y(2) = \frac{1}{2}$$

mit Hilfe eines integrierenden Faktors.

Zusatzaufgaben:

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3, \quad y(1) = 1.$$

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \arctan(x^2 + y^2 - 1) \cdot \begin{pmatrix} -x \exp(-x^2 - y^2) \\ -y \arctan(y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a.) Beweisen Sie, dass die Lösung $v(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \infty)$ beschränkt ist.

b.) Skizzieren Sie das Vektorfeld der Differentialgleichung.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y e^{xy} + x e^{xy} y' = 0.$$

a.) Zeigen Sie Exaktheit.

b.) Finden Sie eine Stammfunktion und geben Sie eine Lösung an.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$yx^2 + x^3 y' = 0.$$

a.) Finden Sie einen integrierenden Faktor.

b.) Finden Sie eine Stammfunktion und geben Sie eine Lösung an.