Sommersemester 2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsserie 5

Abgabe am 27.06.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' = ay \quad \text{mit } a \neq 0$$

auf $\mathbb{R}$. Wandeln Sie sie in ein äquivalentes System erster Ordnung um.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^3 \cdot \mathrm{e}^x}{1+y^2} + x \cdot \sin(y)\ , \quad y(0) = 1$$

genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und konvex.

a) Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiterhin gebe es eine Konstante $M > 0$ sodass für alle $\xi \in \Omega$ die Ungleichung $\|\nabla f(\xi)\| \leq M$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M \cdot \|y - x\|\,.$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie dazu den Mittelwertsatz für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

b) Es sei nun $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Weiterhin gebe es eine Konstante $M > 0$ sodass für alle $\xi \in \Omega$ und alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ die Ungleichung $\|\nabla f_j(\xi)\| \leq M$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sqrt{m} \cdot M \cdot \|y - x\|\,.$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Wenden Sie das Picard'sche Iterationsverfahren auf das folgende Anfangswertproblem an:

$$y' = 2xy\ , \quad y(0) = y_0\,.$$

Zusatzaufgabe **4 Punkte**

Es seien $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es existiere ein $L > 0$ sodass für alle $s, t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|h(s) - h(t)| \leq L \cdot |s - t|$$

gilt. Weiterhin habe h genau zwei Nullstellen $y_1 < y_2$. Zeigen Sie, dass für $y_1 \leq y_0 \leq y_2$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(x) \cdot h(y)\ , \quad y(x_0) = y_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.