Analysis III

Wintersemester 2011/2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Montag 25.10. 2011**

(1) Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Länge:

(a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$,

(b) $\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \big(a\cos^3 t, a\sin^3 t\big)$ für $a > 0$.

(2) Untersuchen Sie die folgenden Kurven auf Rektifizierbarkeit:

(a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$

(b) $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$

Tipp: Skizzieren Sie die Kurve und geben Sie eine obere bzw. untere Abschätzung für die Kurvenlänge an.

(3) Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld F.

(b) Zeigen Sie $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$.

(c) Ist F ein Gradientenfeld? (Tipp: Berechnen Sie $\int_\gamma F d\gamma$ für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin t, \cos t)$.)

(4) Sei $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(|x|)$

(a) Berechnen Sie $\nabla\varphi$.

(b) Ist $G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^3} x$ ein Gradientenfeld? Finden Sie gegebenenfalls ein Potenzial, d.h. eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, so dass $G = \nabla\varphi$.

Zusatz

(Z1) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie: γ ist rektifizierbar mit Länge L dann und nur dann wenn $\lim_{|Z|\to 0} L_Z(\gamma) = L$.

(Z2) Was ist hier faul?