Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Mittwoch 27.01.2010**

(1) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm relativ kompakte Teilmenge $A \subset C(X)$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.

(2) Sei X ein Banachraum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt schwach konvergent gegen $x \in X$ falls für alle $\phi \in X'$ gilt, dass

$$\phi(x_n) \to \phi(x).$$

Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$. Zeigen Sie:

(i) Sei $x_n \xrightarrow{w} x$, dann ist die Folge $(\|x_n\|)$ beschränkt.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Banach-Steinhaus!

(ii) Sei $T : X \to X$ ein kompakter Operator und $(x_n) \subset X$ ein Folge die schwach gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die Folge Tx_n bzgl. $\|\cdot\|$ gegen 0. Hinweis: Es gilt $\phi \circ T \in X'$ für alle $\phi \in X'$.

(3) Es sei H ein komplexer Vektorraum und $s : H \times H \to \mathbb{C}$ eine symmetrische, positive Sesqulinearform. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$|s(f,g)|^2 = s(f,f)s(g,g)$$

in der Cauchy-Schwarz Ungleichung genau dann gilt, wenn f und g linear abhängig sind.

(4) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass für $p \neq 2$ die Normen der Räume ℓ^p und $L^p(\mathbb{R})$ von keinem Skalarprodukt erzeugt werden.