Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Dienstag 16.12.2014**

(1) Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Vektoren $a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1} = 0.$$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ die Parametrisierung einer Fläche mit $d \leq N$. Weiterhin bezeichne G_φ die Gramsche Determinante zu φ. Dann gilt folgende Äquivalenz:

(i) Die Abbildung φ ist regulär.

(ii) Für alle $x \in U$ gilt $G_\varphi(x) \neq 0$.

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 2, Blatt 7.

(2) Es seien $a_j \in \mathbb{R}^N$ für $j = 1, \dots, N-1$. Berechnen Sie $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1}$ für

a) $N = 2$,

b) $N = 3$.

(3) Sei $f : (a, b) \to [0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei

$$\Phi : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \phi) \mapsto (f(r)\cos\phi, f(r)\sin\phi, r).$$

Untersuchen Sie unter welchen weiteren Voraussetzungen es sich bei Φ um eine reguläre Parametrisierung handelt. (Man nennt die durch Φ erzeugte Fläche, die durch f erzeugte Rotationsfläche.)

(4) Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die folgenden Parametisierungen im $\mathbb{R}^3$.

(a) Kugelkoordinaten:

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

(b) Polarkoordinaten:

$$\Psi : (0, 2\pi) \times (-pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto R(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta).$$

Zusatzaufgabe.
Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parametisierung der Sphäre mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ durch

(a) die stereographische Projektion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2),$$

(b) die Mercatorabbildung

$$\Psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{\cosh v}(\cos u, \sin u, \sinh v).$$