**Wintersemester 2015/16** **Prof. Dr. D. Lenz**

# Höhere Analysis II

---

**Blatt 2** **Zur Besprechung in der Übung am 10.11.2015**

(1) Seien $X, Y$ Banachräume und $X$ unendlich-dimensional. Zeigen Sie, dass es einen linearen Operator $T\colon X \longrightarrow Y$ gibt, der nicht abgeschlossen ist.

(2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in [1, \infty]$ und $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Definiere den maximalen Multiplikationsoperator durch

$$D(M_\varphi) = \{f \in L^p(X, \mu) \mid \varphi f \in L^q(X, \mu)\},$$
$$M_\varphi\colon D(M_\varphi) \subset L^p(X, \mu) \longrightarrow L^q(X, \mu),\ M_\varphi f = \varphi f.$$

Zeigen Sie, dass $M_\varphi$ abgeschlossen ist.

(3) In der Situation von Aufgabe (2) sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Leb})$, $p = q$ und $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Identität. Zeigen Sie, dass $M_\varphi$ dann $M_{\varphi^2}$-beschränkt mit $M_{\varphi^2}$-Schranke 0 ist.

(4) Sei $k \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$K\colon L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),\ Kf = k * f$$

wird ein beschränkter linearer Operator mit $\|K\| \leq \|k\|_{L^1}$ definiert.

(b) Ist $k \geq 0$ fast überall, so gilt $\|K\| = \|k\|_{L^1}$.

**Zusatzaufgabe:** Sei $E$ ein Banachraum und $A, B\colon E \longrightarrow E$ beschränkte lineare Operatoren. Zeigen Sie, dass $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie zunächst für $|\lambda| > \|A\|\|B\|$ die Resolvente $(\lambda - BA)^{-1}$ durch $(\lambda - AB)^{-1}$ aus (verwenden sie Aufgabe (1)). Zeigen Sie dann, dass dieser Ausdruck für alle $\lambda \in \rho(AB) \setminus \{0\}$ ein Inverses von $\lambda - BA$ liefert.