Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Besprechung Dienstag 24.05.2016**

(1) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an φ dafür, dass ein $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ existiert mit $\Phi' = \varphi$.

(2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\int_K |f| dx < \infty$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$.

(ii) Es gilt $f\varphi \in L^1(\Omega)$ fuer jedes $\varphi \in C_c(\Omega)$.

(iii) Zu jedem kompakten $K \subset \Omega$ existiert ein $C \geq 0$ mit $f\varphi \in L^1(\Omega)$ und

$$\left| \int_\varphi f\varphi dx \right| \leq C\|\varphi\|_\infty$$

für alle $\varphi \in C_c(\Omega)$.

(b) Kann man in (a) $C_c(\Omega)$ durch $C_c^\infty(\Omega)$ ersetzen?

(3) Sei N eine natürliche Zahl. Sei die Form Q auf dem Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ definiert durch

$$D(Q) := \{f \in \ell^2(\mathbb{Z}^N) : \sum_{n,m:\|n-m\|=1} |f(n) - f(m)|^2 < \infty\}$$

$$Q(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{n,m:\|n-m\|=1} \overline{(f(n) - f(m))}(g(n) - g(m)).$$

(a) Finden Sie einen diskreten Maßraum (X, m) und einen Graphen b mit $Q = Q_b$.

(b) Zeigen Sie, dass Q eine auf ganz $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ definierte nach unten beschränkte abgeschlossene Form ist.

(c) Zeigen Sie, dass Q beschraenkt ist und geben Sie den zu Q gehoerigen selbstadjungierten Operator an.

(Hinweis: Wenn Sie (a) gelöst haben, können Sie natürlich Aussagen der Vorlesung und aus früheren Übungen verwenden.)

(4) Sei N eine natürliche Zahl und Δ der auf ganz $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ definierte Operator mit

$$(\Delta f)(n) = \sum_{m:\|m-n\|=1} (f(n) - f(m)).$$

Sei $\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ und $F : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}^N)$ die Fouriertransformation (d.h. es gilt

$$Ff(\xi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f(n)e^{-2\pi i\xi n}$$

und

$$(F^{-1}g)(n) = \int_{\mathbb{T}^N} g(\xi)e^{2\pi i\xi n}d\xi,$$

wobei wir fuer $\xi = x + \mathbb{Z}^N$ und $n \in \mathbb{Z}^N$ setzen $e^{2\pi i ß n} := e^{2\pi i x n}$.)

(a) Berechnen Sie $F^{-1}\Delta F$.

(b) Bestimmen Sie $\sigma(\Delta)$.

(c) Was ist $\|\Delta\|$?