Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 4 **Abgabe: Montag 18.06.2012**

(1) Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an.

a.) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x$ mit $y(1) = 1$.

b.) $y' = 1 + x - y$ mit $y(0) = 1$.

(2) Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an.

a.) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ mit $y(1) = 1$.

b.) $y' = \frac{y}{x} + \exp\left(-\frac{y}{x}\right)$ mit $y(1) = 0$.

(3) Geben Sie eine Lösung für folgende Anfangswertprobleme an.

a.) $y' = e^{x+y} - 1$ mit $y(0) = 1$.

b.) $y' = (x + y - 4)^2$ mit $y(\pi) = 4 - \pi$.

(4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f(x,y)y' - g(x,y) = 0$$

mit $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = -ye^{xy}$.

a.) Untersuchen Sie die Differentialgleichung auf Exaktheit.

b.) Finden Sie im Falle der Exaktheit eine Stammfunktion und geben Sie eine lokale Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 1$ an.

Zusatzaufgaben:

(1) a.) Gegeben seien $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, zwei Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ sowie das AWP

$$(x,y)' = (f(x,y), g(x,y)), \qquad x(0) = x_0, y(0) = y_0 \qquad (*)$$

Ermitteln Sie die Gestalt dieses AWPs in Polarkoordinaten, also Funktionen $p(r,\varphi), q(r,\varphi)$ und Anfangswerte r_0, φ_0, sodass eine Lösung $(\mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^2$ des AWPs

$$(r,\varphi)' = (p(r,\varphi), q(r,\varphi)), \qquad r(0) = r_0, \varphi(0) = \varphi_0 \qquad (**)$$

durch die Transformation

$$\lambda_1(t) := \mu_1(t)\cos\mu_2(t), \qquad \lambda_2(t) := \mu_1(t)\sin\mu_2(t)$$

zu einer Lösung $(\lambda_1, \lambda_2) : I \to \mathbb{R}^2$ des AWPs (*) führt.

b.) Transformieren Sie das System

$$(x,y)' = (-y + xh(r), x + yh(r)),$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist und $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion bezeichnet, in Polarkoordinaten.