Operatoren auf Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2017 **Marcel Schmidt**

Blatt 2

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f \in C^\infty(M,N)$. Die Ableitung von f im Punkt $p \in M$ ist die lineare Abbildung

$$Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N,\, \xi \mapsto [g \mapsto \xi(g \circ f)].$$

(1) (a) Zeigen Sie, dass die oben definierte Ableitung einer glatten Funktion zwischen zwei Mannigfaltigkeiten tatsächlich die behaupteten Eigenschaften hat.

(b) Für $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den von der globalen Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ induzierten Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$ mit Φ_p^n. Sei ferner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und sei $f'(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ihre Fréchet-Ableitung (die Ableitung im üblichen Sinne, siehe Analysis II). Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi_p^n"] \arrow[d, "f'(p)"'] & T_p\mathbb{R}^n \arrow[d, "Df(p)"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\Phi_{f(p)}^m"] & T_{f(p)}\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

(2) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $X : U \to TM$ ein Vektorfeld. Beweisen sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) X ist glatt.

(ii) Für jedes $p \in U$ existiert eine glatte Karte (V, φ) mit zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i), sodass die Funktionen

$$X^i : U \cap V \to \mathbb{R},\, q \mapsto X_q(x^i)$$

glatt sind.

(iii) Für jede glatte Karte (V, φ) mit zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i) sind die Funktionen

$$X^i : U \cap V \to \mathbb{R},\, q \mapsto X_q(x^i)$$

glatt.

(3) Beweisen Sie, dass jede kompakte glatte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik besitzt.

(4) Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f, g \in C^\infty(M)$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beweisen Sie die Produktregeln

$$d(fg) = fdg + gdf \text{ und } \nabla_{\mathbf{g}}(fg) = f\nabla_{\mathbf{g}} g + g\nabla_{\mathbf{g}} f,$$

und die Kettenregeln

$$d(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\, df \text{ und } \nabla_{\mathbf{g}}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\, \nabla_{\mathbf{g}} f.$$

(5) Seien $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$ glatte Mannigfaltigkeiten. Wir statten $M := X \times Y$ mit der Produkttopologie und der von

$$\{((\varphi, \psi), U \times V) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_X \text{ und } (V, \psi) \in \mathcal{D}_Y\}$$

erzeugten glatten Struktur $\mathcal{D}_M$ aus. Es heißt $(M, \mathcal{D}_M)$ das kartesische Produkt von $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$. Ist $y \in Y$ gegeben, so erzeugt jede Derivation $\xi \in T_x X$ eine Derivation $\xi_y \in T_{(x,y)} M$ durch

$$\xi_y(f) := \xi(f(\cdot, y)).$$

Die Abbildung $T_x X \to T_{(x,y)} M$, $\xi \mapsto \xi_y$ ist linear und injektiv. In diesem Sinne kann $T_x X$ als Unterraum von $T_{(x,y)} M$ aufgefasst werden. Führt man analoges für $T_y Y$ durch, so gilt

$$T_{(x,y)} M = T_x X \oplus T_y Y.$$

(a) Beweisen Sie alle Behauptungen aus dem obigen Abschnitt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das kartesische Produkt von $(0, \infty)$ und $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.