Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Donnerstag 21.06.2018**

(1) Sei H ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum (d.h. es ist H vollständig bzgl. der Norm $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$).

(b) Jede lineare Abbildung von H nach H ist stetig.

(c) Eine Abbildung $A : H \longrightarrow H$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

(2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Dann definiert man den *wesentlichen Wertebereich* von φ durch

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\varphi^{-1}(U_\varepsilon(\lambda))) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\}.$$

(Hier bezeichnet $U_\varepsilon(\lambda)$ die offene ε-Kugel um λ in $\mathbb{C}$.)

(a) Zeigen Sie, dass im allgemeinen weder der wesentliche Wertebereich einer Funktion in ihrem Wertebereich enthalten ist noch umgekehrt der Wertebereich im wesentlichen Wertebereich enthalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass für beschränktes, meßbares φ der wesentliche Wertebereich von φ mit dem Spektrum des Multiplikationsoperators

$$M_\varphi : L^2(X, \mu) \longrightarrow L^2(X, \mu), f \mapsto \varphi f,$$

übereinstimmt.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines selbstadjungierten Operators A mit $\sigma(A) = [0, 1]$, so dass A keine Eigenwerte besitzt.

(3) Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie: Ist S eine beschränkte Teilmenge von H, so besitzt jede Folge aus S eine schwach konvergente Teilfolge.

(Hinweis: Sei (x_n) die Folge. Betrachten Sie den von der Folge erzeugten abgeschlossenen Unterraum $\overline{\mathrm{Lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Dieser besitzt (Warum?) eine (höchstens) abzählbare totale Menge s_j, $j \in \mathbb{N}$. Es reicht nun (Warum?) eine Teilfolge x_{n_k} zu finden, sodass $\langle s_j, x_{n_k} \rangle$ fuer jedes j konvergiert.)

(4) Zeigen Sie, dass ein Operator im Hilbertraum H genau dann kompakt ist, wenn er schwach konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet.

(Hinweis: Sie können verwenden, daß eine schwach konvergente Folge beschränkt ist. Die eine Richtung wurde in der Vorlesung im wesentlichen mitbewiesen. Zum Beweis der anderen Richtung koennen Sie nutzen, dass jede beschränkte Folge im Hilbertraum eine schwach konvergente Teilfolge besitzt (vgl. vorigen Aufgabe)).

Zusatzaufgabe. Sei A ein kompakter selbstadjungierter Operator in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum. Zeigen Sie, daß das Spektrum von A aus nichtverschwindenden Eigenwerten und 0 besteht.