Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe 16.12.2010**

(1) Zeigen Sie: Für keine Menge X gibt es eine surjektive Abbildung $J : X \to \mathcal{P}(X)$, wobei die Potenzmenge $\mathcal{P}$ die Menge der Teilmengen von X ist. In diesem Sinne ist also die Potenzmenge einer Menge echt mächtiger als die Menge.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie $\{x \in X : x \notin J(x)\} \ldots$.

(2) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(n^{\frac{5}{2}}\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1} - \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left(\frac{n!}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a > 0$, (c) $\left(\frac{n!}{\binom{2n}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(3) Sei die Folge (a_n) rekursiv definiert mit $a_1 \geq 0$ und

$$a_{n+1} := \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}, \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Sie können zum Beispiel Monotonie untersuchen und die beiden Fälle $a_1^2 > 3$ und $a_1^2 < 3$ unterscheiden.

(4) Sei $f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Untersuchen Sie die Folge (a_n) gegeben durch

$$a_n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}(1)$$

auf Konvergenz.

Hinweis: Geben Sie eine rekursive Definition der Folge an und untersuchen Sie auf Beschränktheit und Monotonie. Was können Sie über Vorzeichen und Größe von $a_{n+1} - a_n$ im Verhältnis zu $a_n - a_{n-1}$ sagen?

Zusatzaufgabe: Sei (I_n), $n \in \mathbb{N}$, eine Folge abgeschlossener, nichtleerer Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $S := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Zeigen Sie:

- S ist ein abgeschlossenes nichtleeres Intervall.
- Es besteht S genau dann aus einem Punkt, wenn gilt $|I_n| \to 0$.

Was können Sie über $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ sagen, wenn es sich bei (I_n) um offenen Intervalle mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ handelt?