Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe 20.01.2011**

(1) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (x_n) konvergiert.

(b) Falls $\sum_{n\geq 1} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, so konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} x_n^2$.

(2) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz/absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}, \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{mit} \quad x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = k^2, \text{ für } k\in\mathbb{N} \text{ geeignet}, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis zu (a): Es gilt $0 < e^{-2} < 1$.
Hinweis zu (d): Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

(3) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für alle $n \geq 2$ nicht lipschitzstetig ist.

(4) Sei

$$N : (0,\infty) \to \mathbb{Q}, \quad N(x) = \begin{cases} 0 & : \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{p} & : \text{für } x = q/p \text{ wobei } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass N in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.

Zusatzaufgabe:

(Z1) Zeigen Sie, dass die Voraussetzung $x_n \geq 0$ in Aufgabe 1 (b) nötig ist. Hinweis: Es geht darum ein Gegenbeispiel zu finden.