Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Mittwoch 30.10.2013 bis 16:00**
im Sekretariat, Zimmer 3505, Ernst-Abbe-Platz 2

(1) (a) Geben Sie eine endliche Menge N mit einem augezeichneten Element e und einer injektiven Abbildung $s : N \longrightarrow N$ an, so dass gilt:

Ist M eine Teilmenge von N mit $e \in M$ und $s(n) \in M$ falls $n \in M$, so gilt $M = N$.

(b) Geben Sie noch eine solche Menge an.

(2) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Seien A_n, $n \in N$, die eindeutig bestimmten Teilmengen von N für die gilt $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$. Zeigen Sie:

(a) Durch
$$x \le y :\Longleftrightarrow A_x \subseteq A_y$$
ist eine Ordnungsrelation auf N definiert.

(b) $A_x = \{n \in N \mid n \le x\}$.

(c) N ist total geordnet bezüglich $\le$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass die Menge

$$L := \{n \in N \mid \text{das einzige } x \in A_n \text{ mit } \nu(x) \notin A_n \text{ ist } n\}$$

induktiv ist. Verwenden Sie dies zum Beweis der Aussage.

Für die folgenden Aufgaben dürfen Sie die Rechenregeln der natürlichen Zahlen als bekannt voraussetzen.

(3) Beweisen Sie induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

Was vermuten Sie allgemein für

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1), \qquad \text{wobei } m \in \mathbb{N}?$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung wieder durch Induktion.

(4) Beweisen Sie, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar ist.

Zusatzaufgaben:

(Z1) Lernen Sie das griechische Alphabet auswendig.

Α	α	Alpha	Ν	ν	Ny
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
Ι	ι	Jota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	My	Ω	ω	Omega

Verinnerlichen Sie insbesondere den Unterschied von ϕ und ψ bzw. χ und ξ. Schreiben Sie den folgenden Sätze mit griechischen Buchstaben: “Max gibt Fips aus Flachs einen Klapps.“

Für Teil (b) der Zusatzaufgabe gibt es einmalig 3 Punkte.

(Z2) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Seien A_n, $n \in N$, die eindeutig bestimmten Teilmengen von N, für die gilt $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$. Seien $n \in N$ und $f : A_n \longrightarrow A_n$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Es ist $f : A_n \longrightarrow A_n$ injektiv.

(ii) Es ist $f : A_n \longrightarrow A_n$ surjektiv.