Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe 07.11.2014**

(1) ('Kurze Induktion' impliziert 'Lange Induktion') Es genüge (N, e, ν) mit $e \in N$ und $\nu : N \to N$ den Peano Axiomen und es seien A_n, $n \in N$, die in der Vorlesung betrachteten Mengen. Seien weiterhin Aussagen $B(n)$, $n \in N$ gegeben. Zeigen Sie, dass $B(n)$ für alle $n \in N$ wahr ist, falls gilt

- $B(e)$ ist wahr.
- Gilt $B(k)$ für alle $k \in A_n$, so folgt dass $B(\nu(n))$ wahr ist.

(2) (Wohlordnung und Induktionsaxiom) Sei eine Menge B gegeben mit einem ausgezeichneten Element e und einer bijektiven Abbildung

$$\nu : B \longrightarrow B \setminus \{e\}$$

und einer Totalordnung $\leq$ mit

$$n \leq \nu(n) \text{ für alle } n \in B.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $(B, \leq)$ ist wohlgeordnet (d.h. jede nichtleere Teilmenge von $(B, \leq)$ besitzt ein bzgl. $\leq$ kleinstes Element).

(ii) Es erfüllt (B, e, ν) das zweite Peano Axiom.

(Hinweis zu (ii) $\Longrightarrow$ (i): Seien A_n die in der Vorlesung betrachteten Mengen. Die Menge $A_n \cup \{l : \nu(n) \leq l\}$ ist induktiv, stimmt also mit N überein. Damit ist also $\nu(n)$ ein kleinstes Element des Komplement von A_n. Zeigen Sie nun, dass eine Teilmenge von B ohne kleinstes Element im Komplement aller A_n liegt.)

(3) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und es werde das Inverse bzgl. Addition von $x \in K$ mit $-x$ bezeichnet. Beweisen Sie

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Körperaxiom Sie verwenden.

(4) Finden Sie eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, so dass $\mathbb{F}_3$ ein Körper wird. Kann man $\mathbb{F}_3$ anordnen?

Zusatzaufgabe: (Rekursive Definition von Mengen) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Seien zu jedem $n \in N$ eine Menge X_n und eine Abbildungen F_n gegeben, so dass F_n die Teilmengen von X_n auf Teilmengen von $X_{\nu(n)}$ abbilden. Sei $S_e \subseteq X_e$ gegeben. Zeigen Sie:

Es gibt eine eindeutige Familie von Mengen T_n, $n \in N$, mit $T_e = S_e$ und $T_{\nu(n)} = F_n(T_n)$ für alle $n \in N$.