Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Donnerstag 17.01.2019**

(1) (a) Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene selbstadjungierte Teilalgebra von $C(X)$, die die Punkte trennt. Zeigen Sie, dass entweder $\mathcal{A} = C(X)$ gilt oder ein $p \in X$ existiert mit $\mathcal{A} = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}$.

(Hinweis: Sie können Beweise aus der Vorlesung modifizieren oder auch $\mathcal{B} = \mathrm{Lin}\{1, \mathcal{A}\}$ betrachten.)

(b) Zeigen Sie, daß die Algebra der Polynome auf $[0, 1]$ mit verschwindendem konstanten Term dicht in $\{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$ ist.

(2) Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional mit $\Lambda(1) = \|\Lambda\|$. Zeigen Sie, daß Λ positiv ist.

(3) Geben Sie ein Beispiel eines lokalkompakten Hausdorffraum X und eines positiven, linearen $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, für das kein $\kappa > 0$ existiert mit

$$|\Lambda(\varphi)| \leq \kappa \|\varphi\|_\infty$$

für alle $\varphi \in C_c(X)$.

(4) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, in dem eine Folge (K_n) kompakter Mengen existiert mit $X = \cup_n K_n$. (Ein solches X heißt σ-kompakt.) Weiterhin sei $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ positiv und linear. Zeigen Sie, daß ein eindeutiges reguläres Maß μ auf den Borelmengen existiert mit

$$\Lambda(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

für alle $\varphi \in C_c(X)$.