Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Mittwoch 08.06.2011**

(1) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und berechnen Sie deren Jacobimatrizen:

(a) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}^m$,

(b) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$,

(c) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$ und wobei B eine reelle symmetrische $d \times d$ Matrix ist,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $f(t) = x_0 + tv_0$ mit $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$.

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ in $x \in U$ partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$, αf fg und, falls $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ partiell differenzierbar sind und die folgenden Formeln gelten

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g, \quad \operatorname{grad}(\alpha f) = \alpha \operatorname{grad} f \\ &\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{grad} \tfrac{f}{g} = \tfrac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2} \ . \end{aligned}$$

(3) Sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig diffenzierbar und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = g(|x|)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in allen $x \neq 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f in $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann in 0 differenzierbar ist, wenn $g'(0) = 0$ ist. In diesem Falle gilt dann $\operatorname{grad} f(0) = 0$.

(4) Zeigen Sie anhand des Beispiels $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, y^3)$, dass sich der Mittelwertsatz nicht auf Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ übertragen lässt.

Zusatzaufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- f ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^2$,
- f ist beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
- f ist in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar,
- die gemischten Ableitungen von f in $(0,0)$ sind verschieden.