Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Abgabe Mittwoch 11.05.2011**

(1) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen A eines metrischen Raumes (M,d) gilt:

(a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, (b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\partial(\partial A) = \partial A$ nicht gilt.

(2) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}^N, d_D(\cdot,\cdot))$ mit der diskreten Metrik

$$d_D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \{0,1\},\ d_D(x,y) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x = y \\ 1, \text{ falls } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Charakterisieren Sie alle bezüglich d_D konvergenten Folgen.

(b) Bestimmen Sie alle bezüglich d_D kompakten Mengen.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^N$ mit der Euklidischen Metrik d_2. Beweisen Sie, dass für $x \in X$ und $r > 0$ für die offene Kugel $U_r(x)$ um x mit Radius r und die abgeschlossene Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r gilt

$$\overline{U_r(x)} = B_r(x), B_r^\circ(x) = U_r(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ein $p \in X$ genau dann $\|p - x\| = r$ erfüllt, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt u mit $\|u - x\| < r$ als auch ein Punkt v mit $\|v - x\| > r$ liegen.

(4) Sei $\mathcal{L}$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\} = \max\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}$ definiert wird und

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt. Dabei bezeichnet

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

wie üblich die euklidische Norm.

Zusatzaufgaben

(1) Sei $M = (0, 1)$ mit der euklidischen Metrik gegeben. Geben Sie eine offene Überdeckung von M an, die keine endliche Teilüberdeckung zulässt.

(2) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $d_D : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ die diskrete Metrik auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen Wörter über $\mathcal{A}$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{A}} = \{u : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\},$$

bezüglich der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_D(x(i), y(i))}{2^i}$$

kompakt ist.

Viel Erfolg!