Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Mittwoch 03.02.2010**

(1) Finden Sie jeweils ein Beispiel eines Hilbertraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und einer Teilmenge $A \subset V$, so dass gilt:

   (a) A ist abgeschlossen aber nicht konvex und es gibt keine beste Approximation von $x \in V \setminus A$ in A.

   (b) A ist abgeschlossen aber nicht konvex und es gibt keine eindeutige beste Approximation von $x \in V \setminus A$ in A.

   (c) A ist konvex aber nicht abgeschlossen und es gibt keine beste Approximation von $x \in V \setminus A$ in A.

(2) Zeigen Sie, dass der Approximationssatz nicht in ℓ^∞ gilt.
Hinweis: Finden Sie eine Teilmenge von ℓ^∞, so dass es zu gegebenen $x \in \ell^\infty$ mehrere beste Approximationen gibt.

(3) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $P : V \to V$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften $P = P^2$ und für alle $u, v \in V$ gilt $\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$. Zeigen Sie, dass es einen Unterraum U von V gibt, so dass P die orthogonale Projektion von V auf U ist.

(4) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und T_0 ein beschränkter nicht auf ganz V definierter linearer Operator von V nach W. Zeigen Sie, dass es dann eine Fortsetzung T von T_0 auf V, so dass T ein beschränkter Operator ist und dass $\|T_0\| = \|T\|$.
Hinweis: Nutzen Sie die Existenz einer orthogonalen Projektion auf $\overline{D(T_0)}$.

Zusatzaufgabe. In einem Hilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$enthält jede beschränkte Folge $x_n)$ eine Teilfolge x_{n_k}, so dass für jedes $y \in V$ die Folge $k \mapsto \langle x_{n_k}, y\rangle$ konvergiert.
Hinweis: Es reicht die Aufgabe für einen separablen Hilbertraum zu lösen. Im allgemeinen Fall ersetzt man dann V durch den von den Folgeelementen x_n, $n \in \mathbb{N}$, erzeugten Hilbertraum. Ist V separabel, so kann man eine abzählbar dichte Teilmenge $A = \{a_l : l \in \mathbb{N}\}$ wählen. Da (x_n) beschränkt ist, ist für jedes $l \in \mathbb{N}$ die Folge $n \mapsto \langle x_n, a_l\rangle$ beschränkt. Mit einem Diagonalfolgeverfahren findet man also eine Teilfolge (x_{n_k}), für die $k \mapsto \langle x_{n_k}, a_l\rangle$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ konvergiert...