Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Freitag 13.07.2012**

(1) Sei E ein Banachraum und $S : E \to E$ ein linearer, beschränkter Operator. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} S^n$ bezüglich der Operatornorm, so ist $(Id - S)$ invertierbar und es gilt

$$(Id - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe ist $\limsup_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$.

(2) Sei $g \in C([0,1])$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(s) - \int_0^1 2stf(t)dt = g(s)$$

eine eindeutige Lösung $f_g \in C([0,1])$ besitzt und die Abbildung $g \mapsto f_g$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Berechnen Sie eine solche Lösung für $g(s) = \sin(\pi s)$.

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 1 im Banachraum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ an.

(3) Es sei der Volterra-Integraloperator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeben durch

$$Tf(s) := \int_0^s f(t)\, dt.$$

Bestimmen Sie dessen Spektralradius und Spektrum und zeigen Sie, dass 0 kein Eigenwert ist.

(4) Sei $L : \ell^2 \to \ell^2$ und $R : \ell^2 \to \ell^2$ gegeben durch

$$L((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$$

$$R((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Bestimmen Sie die Spektren von R und L.

Zusatzaufgabe. Der Volterra-Integraloperator $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ mit Kern $k \in C([a,b] \times [a,b])$ ist definiert durch

$$Tf(s) := \int_a^s k(s,t)f(t)\,dt.$$

Zeigen Sie, dass die Volterra-Integralgleichung $(Id - \lambda T)f = g$ zu gegebenen $g \in C([a,b])$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ genau eine Lösung hat. Stellen Sie diese Lösung durch eine Neumannsche Reihe dar.
Hinweis: Betrachten Sie den Spektralradius von T.