Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Besprechung Dienstag 5.07.2016**

(1) Sei T ein selbstadjungierter Operator T. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c > 0$:

(i) Es gilt $\sigma(T) \cap (\lambda - c, \lambda + c) \neq \emptyset$.

(ii) Es gibt ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\|(T - \lambda)f\| < c\|f\|$.

(2) Sei T ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, daß $\sigma_{ess}(T)$ abgeschlossen ist.

(3) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathcal{H}$ beliebig. Seien $e_1, \ldots, e_{n+1}$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass ein $e \in \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_{j+1}\}$ existiert mit $e \neq 0$ und $e \perp f_1, \ldots, f_n$.

(4) Sei T ein selbstadjungierter Operator im separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit reinem Punktspektrum und $\inf \sigma(T) > -\infty$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Aufzaehlung der Eigenwerte von T. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Ausssagen:

(i) $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$.

(ii) Es ist $(T - \lambda)^{-1}$ kompakt fuer ein (jedes) $\lambda \in \varrho(T)$.