Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Probeklausur Zum Bestehen sind 25 Punkte (von 50 Punkten) nötig.

(1) **4 Punkte**

(a) Wie ist das Kurvenintegral eines Vektorfeldes definiert?

(b) Sei nun konkret $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (-y, x)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int F d\gamma$ für folgende Kurve:

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \cos t(\cos t, \sin t).$$

(2) **7 Punkte**

(a) Geben Sie die Definition des Oberflächenintegrals einer Funktion bzgl. einer Parametrisierung.

(b) Sei $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Berechnen Sie die Gramsche Determinante der Parametrisierung $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(x, y) = (x,\ y,\ x^3 y^3).$$

(3) **8 Punkte**

(a) Wann heißt ein Vektorfeld konservativ?

(b) Was besagt das Lemma von Poincaré?

(c) Geben Sie ein Beispiel eines nicht konservativen Vektorfeldes (mit Begründung).

(4) **3 Punkte**

Wie lautet der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen?

(5) **3 Punkte**

Bestimmen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$-\frac{d^2}{dx^2} f = \lambda f.$$

(6) **6 Punkte**

Sei $\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$ und $\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times [0,1]$. Man bestimme alle Funktionen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{\partial}{\partial t} u$$

mit der Randbedingung $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ erfüllen und den folgenden Bedingungen genügen:

- u ist zweimal stetig differenzierbar auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$,
- es existieren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $u(t,x) = f(t)g(x)$ für alle $(t,x) \in \overline{\Omega}$.

(7) **5 Punkte**

a) Was versteht man unter dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$?

b) Zeigen Sie: Jede beliebig oft differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^N$ mit kompaktem Träger gehört zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

(8) **5 Punkte**

a.) Definieren Sie Semi-Skalarprodukt und Skalarprodukt.

b.) Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Abbildung um ein Semi-Skalarprodukt bzw. um ein Skalarprodukt handelt. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^1[-1,1] \times C^1[-1,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{u(x)} v(x) dx + \int_{-1}^{1} \overline{u'(x)} v'(x) dx,$$

wobei $C^1[-1,1]$ der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen von dem Intervall $[-1,1]$ nach $\mathbb{C}$ ist und u' die erste Ableitung einer Funktion $u \in C^1[-1,1]$ bezeichnet.

(9) **9 Punkte**

a.) Was ist eine Norm?

b.) Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Abbildung um eine Norm handelt. Sei

$$\| \cdot \| : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \|u\| = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $C[0,1]$ der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ ist.

(c.) Untersuchen Sie die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

auf punktweise, gleichmäßige und Konvergenz bezüglich $\| \cdot \|$ in $C[0,1]$.