Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 11 **Abgabe Mittwoch 27.01.2016**

(1) Seien $0 < r < R$ und sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2).$$

Die Menge

$$\mathbb{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$$

beschreibt einen Torus. Berechnen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum im Punkt $p = (r, 0, 0)$. Zeichnen Sie den Tangentialraum.

Hinweis: Aus Serie 10 ist bekannt, dass $\mathbb{T}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

(2) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ sind und ermitteln Sie die Tangentialebene im Punkt p.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^3 + 3xyz = 1\}, \quad p = (0, 1, 1).$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8\}, \quad p = (2, 2, 1).$

(3) Gegeben Sei die Untermannigfaltigkeit $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 - z^2 = 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f.

(4) Sei $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^N$ und $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine symmetrische, lineare Abbildung. Sei nun $Q : S^{N-1} \to \mathbb{R}$, $Q(x) := \langle Ax, x\rangle$. Zeigen Sie, dass Q seine Extrema in den Eigenvektoren zum minimalen und maximalen Eigenwert von A annimmt.

Erinnerung: Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt symmetrisch, falls $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt. In diesem Fall sind alle Eigenwerte von A reell.

Hinweis: Aus Serie 8 ist bekannt, dass $\nabla Q(x) = 2Ax$ gilt.