Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 7 **Abgabe Mittwoch 09.12.2015**

(1) Betrachte den Raum $\mathbb{R}^N$ mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass alle Kugeln konvex sind.

Erinnerung: Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

(2) Es sei $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und d_D die diskrete Metrik auf X. Zeigen Sie, dass jede im metrischen Raum (X, d_D) zusammenhängende Menge höchstens ein Element enthält.

(3) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases},$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases},$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases},$$

folgende Eigenschaften besitzen:

(a) f_1 ist partiell stetig, aber nicht richtungsstetig in $(0,0)$.

(b) f_2 ist richtungsstetig, aber nicht stetig in $(0,0)$.

(c) f_3 ist stetig in $(0,0)$.

(4) Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ stetig und $t_0 \in (a,b)$ beliebig. Zeigen Sie, dass γ genau dann in t_0 differenzierbar ist, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t-t_0}(\gamma(t) - \gamma(t_0))$ existiert.

Zusatzaufgaben

(1) Sei (X, d) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender metrischer Raum. Zeigen Sie, dass (X, d) ist wegzusammenhängend ist.

Erinnerung: (X, d) heißt lokal wegzusammenhängend, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert.

(2) Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei (f_n) eine Folge von reellwertigen stetigen Funktionen auf K, die monoton gegen eine stetige, reellwertige Funktion f auf K konvergiert. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.