Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Dienstag 09.12.2014**

(1) Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Prämaßraum. Es bezeichne $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ die durch $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra. Weiterhin sei eine meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Funktion f ist nichtnegativ und gehört zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

(ii) Es existiert eine Folge von Elementarfunktionen (g_n) bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

·) Die Folge (g_n) ist punktweise monoton wachsend, d.h. $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

·) Die Folge (g_n) konvergiert μ-fast überall gegen die Funktion f.

·) Es existiert eine positive Konstante $C > 0$, sodass $\int_X g_n(x)\, d\mu(x) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zeigen Sie weiterhin, dass eine Folge wie in (ii) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

erfüllt.

Hinweis: Eine Funktion g heißt Elementarfunktion bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, falls $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$ und $B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ existieren mit

$$g = \sum_{j=1}^{N} c_j 1_{B_j}.$$

(2) Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times d}$ mit $d \leq N$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\det(A^*A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A = d.$$

Bitte wenden.

(3) Sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sin \frac{u}{2} \cos u \\ \sin \frac{u}{2} \sin u \\ \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $D\Phi$, $D\Phi^T D\Phi$ und $\det D\Phi^T D\Phi$.

(4) Sei $0 < r < R$ und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u,v) := R \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $D\Phi$, $D\Phi^T D\Phi$ und $\det D\Phi^T D\Phi$.

Zusatzaufgabe.
Skizzieren Sie die Flächen in Aufgaben (3) und (4).