Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Weihnachtszettel **Zur Besprechung in der Übung am 05.01.2016**

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr!

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1([a,b])$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_{[a,x]} f\, d\lambda$$

absolut stetig ist (vgl. Blatt 7).

Hinweis: Approximieren Sie f durch beschränkte Funktionen.

(2) Konstruieren Sie eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\lambda(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta} = \frac{1}{2}.$$

(3) Es sei rekursiv eine Folge (C_n) von Teilmengen von $[0,1]$ definiert durch $C_0 = [0,1]$ und $C_{n+1} = \frac{1}{3}(C_n \cup (2 + C_n))$. Sei $C = \bigcap_n C_n$.

Weiterhin sei eine Folge von Funktionen (F_n) definiert durch

$$F_n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1],\ F_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \lambda(C_n \cap [0,x]).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0,2\}\}$.

(b) Es gilt $\lambda(C) = 0$.

(c) Die Funktion F_n ist linear auf jeder Zusammenhangskomponente von C_n und konstant auf jeder Zusammenhangskomponente vom Komplement von C_n.

(d) Die Folge (F_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine monotone, stetige Funktion F mit

$$C = \{x \in [0,1]\colon F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon) > 0 \text{ für alle } \epsilon > 0\}.$$

(e) Die Funktion F ist nicht absolut stetig.

(f) Die Funktion F ist in allen Punkten $x \in [0,1] \setminus C$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$, aber $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

(4) Für $t < 0$ sei

$$f_t \colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f_t(x) = \frac{1}{t+x}.$$

Weiter sei $L(I) = \operatorname{lin}\{f_t \mid t \in I\}$ für $I \subset (0, \infty)$.

Zeigen Sie

(a) Falls $I \subset (0, \infty)$ keine isolierten Punkte hat, so ist $L(I) \subset C_0([0, \infty))$ dicht.

(b) Es genügt anzunehmen, dass I einen Häufungspunkt in $(0, \infty)$ hat, damit $L(I) \subset C_0([0, \infty))$ dicht ist.

(5) Es seien X, Y lokalkompakte Räume. Für $f \in C_0(X)$, $g \in C_0(Y)$ sei $f \otimes g$ definiert durch $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{lin}\{f \otimes g \mid f \in C_0(X),\ g \in C_0(Y)\}$ dicht in $C_0(X \times Y)$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie, dass es für $x, \tilde{x} \in X$ mit $x \neq \tilde{x}$ eine Funktion $\varphi \in C_0(X)$ mit $f(x) = 1$, $f(\tilde{x}) = 0$ gibt.

Zusatzaufgabe:

In (1) gilt auch die Umkehrung: Ist $F \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig, so gibt es ein $f \in L^1([a, b])$ mit

$$F(x) - F(a) = \int_{[a,x]} f \, d\lambda$$

für fast alle $x \in [a, b]$.

Hinweis: Es gilt $F' = f$ fast überall. Zeigen Sie dafür zunächst, dass F von beschränkter Variation ist, und benutzen Sie, was sie über Funktionen von beschränkter Variation wissen (vgl. Analysis III, Blatt 3).