Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Mittwoch 4.11. 2009**

(1) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ eine stetige, streng monoton wachsende konkave Funktion mit $f(0) = 0$. Sei $e : M \times M \longrightarrow [0,\infty)$ definiert durch

$$e(x, y) := f(d(x, y)).$$

Zeigen Sie:

(a) Es definiert e eine Metrik auf M.

(b) Die Metriken d und e sind äquivalent.

(2) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{R}$ wird durch $e(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ eine Metrik definiert. Diese Metrik erzeugt dieselbe Topologie wie die Euklidische Metrik. Der metrische Raum $(\mathbb{R}, e)$ ist nicht vollständig.

(3) Auf $\mathbb{R}$ sei $\mathcal{T}$ die Familie der Teilmengen A, für die gilt: Zu jedem $x \in A$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[x, x + \varepsilon) \subset A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie definiert.

(b) Charakterisieren Sie die konvergenten Folgen in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(c) Zeigen Sie, dass $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$ genau dann stetig ist, wenn für jede bzgl. $\mathcal{T}$ konvergente Folge $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.

(d) Charakterisieren Sie die stetigen Funktionen $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie})$.

(4) Seien X und Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge B von Y ist das Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

(iii) Für jede Teilmenge A von X gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Wir wünschen allen einen guten Start ins Semester!