Höhere Analysis I - Notizen[1]

Jena - Sommersemester 2012

Daniel Lenz

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Eine kurze Einfuehrung

Ein wesentlicher Teil der höheren Analysis befasst sich mit linearen Abbildungen
$$T : E \longrightarrow F$$
zwischen Vektorraumen E und F. Solche Abbildungen heißen auch (lineare) Operatoren. Die Vektorräume sind in der Regel *unendlichdimensional* und oft Räume von Funktionen. Ist $F = \mathbb{R}$ oder $F = \mathbb{C}$, so heisst T ein Funktional (und wird mit φ bezeichnet ;-). Wichtige Beispiele:

Differentialoperatoren
Ein Beispiel: Laplaceoperator
$$\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \mapsto \Delta f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} f(x).$$

Integraloperatoren
Ein Beispiel: $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
$$T : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),\ Tf(x) = \int k(x,y) f(y) dy.$$

Solche Operatoren treten in Physik, Chemie, Biologie, Ingenieurwissenschaften, ... auf. Eine typische Problemstellung betrifft das Loesen von Gleichungen der Form
$$(T - \lambda) f = u$$
bei gegebenem Operator $T : F \longrightarrow F$, $u \in F$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Es geht dann konkret um

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit von Lösungen,
- stetige Abhängigkeit der Lösungen von u (bei gegebener Existenz und Eindeutigkeit)

sowie (in konkreteren Situationen) noch detaillierten Fragen und sogar explizite Berechnung von f aus u.

Im Falle von endlichdimensionalen Vektorraeumen ist das Loesen von Gleichungen der Form $(T - \lambda) f = u$ theoretisch gut verstanden (Determinanten, Cramersche Regel, Gaussscher Algorithmus...). Im Fall von unendlichdimensionalen Vektorraumen ist alles unklar. Insbesondere ist nicht klar, was 'stetige Abhängigkeit' bedeuten soll.

KAPITEL 1

Grundlegende Strukturen - Topologie

In diesem Abschnitt lernen wir ein paar grundlegende Strukturen kennen, die es erlauben, den Begriff der Stetigkeit von Abbildungen abstrakt zu fassen. Das Kapitel hat den Charakter einer Wiederholung.

1. Metrische Raeume

In diesem Abschnitt geht es um Metrik. Das Konzept der Metrik gibt einen quantitativen Abstandsbegriff.

Definition. *Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, fuer die folgende Eigenschaften gelten:*

(M1) $d(x,y) = d(y,x)$ *fuer alle* $x, y \in X$ *(Symmetrie)*
(M2) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *fuer alle* $x, y, z \in X$. *(Dreiecksungleichung)*
(M3) $d(x,y) = 0$ *genau dann wenn* $x = y$ *(Nichtausgeartet)*

Ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X heisst metrischer Raum.

Bemerkung. Aus den Eigenschaften folgt leicht, dass d nach $[0, \infty)$ abbildet.

Interpretation. Die Eigenschaften sind naheliegende Eigenschaften fuer einen Abstand:
- Abstand zwischen Punkten haengt nicht von der Reihenfolge der Punkte ab,
- Abstand erfuellt Dreiecksungleichung
- Verschiedene Punkte haben positiven Abstand.

Beispiel. Ist (X, d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge von X, so ist auch (Y, d) ein metrischer Raum.

Beispiele. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Auf $\mathbb{K}$ definiert $d(x,y) = |x - y|$ eine Metrik.
- Die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{K}^N$ ist gegeben durch
$$d_2(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}.$$
- Auf $\mathbb{Z}^2$ ist die Manhatten Metrik / Blockmetrik gegeben durch
$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|.$$

(Zeichnung)

- Auf $\mathbb{K}^N$ ist die ℓ^1 Metrik gegeben durch
$$d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|.$$
(Das verallgemeinert die Manhatten Metrik.)
- Auf beliebigem X ist die diskrete Metrik gegeben durch
$$d_D(x,y) := 1 \quad \text{falls } x \neq y, \; d_D(x,y) = 0 \; \text{ falls } x = y.$$

Metriken erlauben es, den Begriff der Konvergenz zu definieren. Ein nuetzliches Konzept dazu sind Kugeln und Umgebungen.

Definition. *(Kugel und Umgebung) Sei (X,d) metrischer Raum und $x \in X$. Dann heisst fuer $r \geq 0$*
$$B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\} \textit{ abgeschlossene Kugel um } x \textit{ mit Radius } r$$
$$U_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \textit{ offene Kugel um } x \textit{ mit Radius } r.$$
Eine Menge V heisst Umgebung von x, wenn ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x) \subset V$ (oder aequivalent, wenn ein $r' > 0$ existiert mit $B_{r'}(x) \subset V$.)

Interpretation. Es ist V Umgebung von x, wenn um x herum noch etwas 'Platz in V ist'. Die Elemente von V sind dann in gewisser Weise 'nahe' an x.

Bemerkung. Es gibt Mengen, die Umgebung jedes ihrer Punkte sind. Ist U eine solche Menge, so gibt es also zu jedem $x \in U$ ein $r_x > 0$ mit $U_{r_x}(x) \subset U$. Solche Menge heissen offen. Sie spielen eine besonders grosse Rolle (siehe unten).

Beispiel - Umgebung. In einem metrischen Raum sind $U_r(x)$ und $B_r(x)$ Umgebungen von x fuer jedes $r > 0$.

Beispiel - Kugeln. Kugel in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ bzgl. Euklidischer Metrik und bzgl. ℓ^1-Metrik. Kugel in diskreter Metrik.

Lemma. *(Konvergenz) (X,d) metrischer Raum, (x_n) Folge in X, $x \in X$. Dann sind aequivalent:*
- (i) *Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) \leq \varepsilon$, d.h. $x_n \in B_\varepsilon(x)$, fuer alle $n \geq n_\varepsilon$.*
- (i') *Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) < \varepsilon$ fuer alle $n \geq n_\varepsilon$.*
- (ii) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$
- (iii) *Fuer jede Umgebung U von x existiert ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ fuer alle $n \geq n_U$.*

Interpretation. Alle drei Aussagen geben eine praezise Version, davon dass die (x_n) dem Punkt x beliebig nahe kommen, wenn n beliebig gross wird.

Beweis. Offenbar ist (i) aequivalent zu (i').

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$: Klar, nach Definition von Konvergenz (da $d \geq 0$).

$(i) \Longrightarrow (iii)$: Klar, nach Definition von Umgebung.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Waehle $U = U_\varepsilon$. Dann existiert nach (iii) ein n_U mit $x_n \in U$ fuer alle $n \geq n_U$. Damit gilt also $0 \leq d(x_n, x) < \varepsilon$ fuer alle $n \geq n_U$. □

DEFINITION. *(Konvergenz im metrischen Raum) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heisst konvergent gegen $x \in X$, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt. Wir schreiben dann $x_n \to x$ oder $\lim x_n = x$ und nennen x Grenzwert der Folge (x_n).*

Bemerkung - Notation. Grenzwert einer Folge ist eindeutig. ($x_n \to x$, $x_n \to y$ impliziert $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$...). Damit kann man dann von **dem** Grenzwert einer Folge sprechen.

Mithilfe des Begriffes der Konvergenz koennen wir nun die Stetigkeit von Abbildungen fassen.

LEMMA. *Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Raeume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Abbildung und $x \in X_1$. Dann sind aquivalent:*

- (i) *Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.*
- (ii) *Fuer jede Umgebung V von $f(x)$ existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.*
- (iii) *Fuer jede Folge (x_n) in X_1 mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$.*

Hinweis. Die Umgebungen U und V bzw. die Kugeln B_δ und B_ε im vorangehenden Lemma 'leben' in verschiedenen Raeumen.

Interpretation. Alle drei Aussagen geben eine praezise Version davon, dass Punke nahe an x auf Punkte nahe an $f(x)$ abgebildet werden.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert also ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Damit existiert nach (i) also ein $\delta > 0$ mit

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V.$$

Damit folgt (ii) mit $U = B_\delta(x)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. (Zu finden $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x))$ fuer alle $n \geq n_\varepsilon$.) Nach (ii) existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Wegen $x_n \to x$ existiert weiterhin ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ fuer $n \geq n_U$. Damit folgt die Aussage mit $n_\varepsilon = n_U$.

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$ gewaehlt. (Zu finden $\delta > 0$ mit ...)
Angenommen es gibt kein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Dann gibt es also (mit $\delta = 1/n$) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine $x_n \in B_{1/n}(x)$ mit $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x))$. Dann gilt aber $x_n \to x$ und $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. Das ist ein Wiederspruch. □

DEFINITION. *(Stetigkeit) Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Raeume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Abbildung.*
(a) Es heisst f stetig in $x \in X_1$, wenn es eine (alle) der Bedingungen des vorigen Lemma erfuellt.
(b) Es heisst f stetig, wenn es in jedem Punkt von X_1 stetig ist.

Definition. *(Gleichmäßige Stetigkeit) Seien* (X_1, d_1), (X_2, d_2) *metrische Raeume. Dann heisst* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *gleichmäßig stetig, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

fuer alle $x, y \in X_1$ *mit* $d_1(x, y) \leq \delta$.

Beispiele. Ist $X_1 = \mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Metrik und $X_2 = \mathbb{K}^m$ mit der euklidischen Metrik , so erhaelt man fuer Funktionen $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ gerade den in Analysis I, Analysis II eingefuehrten Stetigkeitsbegriff.

Wir kommen nun noch zu einem fundamentalen Konzept, das spaeter von grosser Bedeutung sein wird.

Definition. *(Cauchy Folge und Vollstaendigkeit) Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Folge* (x_n) *in* X *heisst Cauchy-Folge, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_\varepsilon > 0$ *existiert mit*

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq n_\varepsilon$. *Ein metrischer Raum heisst vollstaendig, wenn jede Cauchy Folge konvergiert.*

Beispiele.

- Die Menge $\mathbb{K}$ mit der Euklidischen Metrik ist vollstaendig (vgl.Analysis I, Analysis II.)
- Die Menge $\mathbb{K}^N$ mit der Euklidischen Metrik ist vollständig.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der Euklidischen Metrik ist nicht vollstaendig.
- Es ist $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit der Euklidischen Metrik nicht vollständig.
- Das Interval $(0, 1)$ mit der Euklidischen Metrik ist nicht vollstaendig.

  (Uebung: Finden Sie eine Metrik d auf $(0, 1)$, so dass
  - $(0, 1)$ bzgl. d vollstaendig ist und
  - jede bzgl. der Euklidischen Norm in $(0, 1)$ konvergente Folge ebenfalls bzgl. d konvergiert.)

Nicht jeder metrische Raum ist vollständig. Aber man kann jeden metrischen Raum vervollständigen. Das ist das naechste Ziel. Zur Vorbereitung lernen wir zwei Konzepte kennen, die auch in anderem Zusammenhang nützlich sind.

Lemma. *(Dichtheit). Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Für* $D \subset X$ *sind äquivalent:*

(i) *Jede nichtleere offene Kugel enthält einen Punkt aus* D.
(ii) *Für jeden Punkt aus* X *enthaelt jede Umgebung ein Element aus* D.
(iii) *Zu jedem* $x \in X$ *gibt es eine Folge* (x_n) *in* D *mit* $x_n \to x$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Klar (da jede Umgebung eine nichtleere offene Kugel enthaelt).

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Waehle fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \cap D \overset{(ii)}{\neq} \emptyset$. Dann liegt (x_n) zu D und konvergiert gegen x.

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Waere $U_r(x)$ (mit $r > 0$) eine Kugel ohne Punkt aus D, so koennte es keine Folge in D geben, die gegen x konvergiert. Das ist ein Widerspruch zu (iii). $\square$

Definition. *(Dicht) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge D von X heisst dicht, wenn sie eine (alle) der Bedingungen aus dem vorigen Lemma erfüllt.*

Ende der 1. Vorlesung.

Definition. *(Isometrie) Seien (X, d) und (Y, e) metrische Raeume. Dann heisst $f : X \longrightarrow Y$ eine Isometrie, wenn*

$$e(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

fuer alle $x, y \in X$ gilt.

Bemerkungen.

- Offenbar ist jede Isometrie (gleichmaessig) stetig.
- Isometrien zwischen Euklidischen Räumen, die den Ursprung erhalten, sind linear (Uebung).

Definition. *(Vervollstaendigung) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein metrischer Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ zusammen mit einer Isometrie $j : X \longrightarrow \widehat{X}$ heisst Vervollstaendigung von (X, d), wenn gilt:*

- *Es ist $j(X)$ dicht in $\widehat{X}$.*
- *Es ist $(\widehat{X}, \widehat{d})$ vollstaendig.*

Interpretation. Via j kann man X als Teilmenge von $\widehat{X}$ auffassen. Dann besagen die beiden Punkte der Definition in der Tat, dass $\widehat{X}$ eine 'minimale' vollstaendige Erweiterung von X ist.

Theorem. *(Existenz und Eindeutigkeit von Vervollstaendigungen) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine Vervollstaendigung. Zwischen je zwei Vervollstaendigungen gibt es eine bijektive Isometrie.*

Beweis. Es ist eine Existenz- und eine Eindeutigkeitsaussage zu zeigen.

Existenz. Sei $\widetilde{X}$ die Menge der Cauchy-Folgen in X. Dann existiert fuer beliebige $(x_n), (y_n)$ aus $\widetilde{X}$

$$\widetilde{d}((x_n), (y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Denn es gilt (nach Dreiecksungleichung)

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Dann wird auf $\widetilde{X}$ durch

$$(x_n) \sim (y_n) :\Longleftrightarrow \widetilde{d}((x_n), (y_n)) = 0$$

eine Aequivalenzrelation definiert und es gilt

$$\widetilde{d}((x_n), (y_n)) = \widetilde{d}((x_n'), (y_n'))$$

falls $(x_n) \sim (x_n')$ und $(y_n) \sim (y_n')$ (Nachrechnen). Aus der Definition folgt auch leicht, dass eine Teilfolge einer Cauchy-Folge zu dieser aequivalent ist.

Sei nun

$$\widehat{X} := \widetilde{X}/\sim .$$

Dann ist $\widehat{X}$ mit

$$\widehat{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \widetilde{d}((x_n), (y_n))$$

ein metrischer Raum. Sei

$$j : X \longrightarrow \widehat{X}, x \mapsto [(n \mapsto x)].$$

Dann hat $(\widehat{X}, \widehat{d})$ zusammen mit j die gewuenschten Eigenschaften:

j ist Isometrie. Das ist klar (...).

j hat dichtes Bild. Sei $p = [(x_n)] \in \widehat{X}$ beliebig. Dann sieht man leicht, dass $p_n := j(x_n)$ gegen p konvergiert (...).

$(\widehat{X}, \widehat{d})$ ist vollstaendig. Sei (p_k) eine Cauchy-Folge in $\widehat{X}$. Sei zu jedem k ein Repräsentant $(x_n^{(k)})$ von p_k gewaehlt. Es gelte ohne Einschraenkung (sonst Teilfolgen waehlen...)

$$d(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) \leq \frac{1}{n}$$

fuer $m \geq n$ und alle k. Dann ist (y_n) mit

$$y_n := x_n^{(n)}$$

eine Cauchy-Folge in X und es gilt $p_k \to [(y_n)]$:
Denn:

- Cauchy-Folge: Es gilt nach Dreiecksungleichung

  $$d(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leq d(x_n^{(n)}, x_l^{(n)}) + d(x_l^{(n)}, x_l^{(m)}) + d(x_l^{(m)}, x_m^{(m)}).$$

  Fuer $l \geq m, n$ kann man den ersten Term mit $1/n$ abschaetzen und den letzten mit $1/m$. Weiterhin konvergiert fuer $l \to \infty$ der mittlere Term gegen $\widehat{d}(p_n, p_m)$. Damit erhaelt man insgesamt also

  $$d(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leq \frac{1}{n} + \widehat{d}(p_n, p_m) + \frac{1}{m}.$$

  Da (p_n) eine Cauchy - Folge ist, folgt die gewuenschte Eigenschaft einfach.
- Konvergenz: Das wird aehnlich gezeigt. Es geht darum

  $$\widehat{d}(p_k, [(x_n^{(n)})]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{(k)}, x_n^{(n)})$$

  abzuschaetzen. Es ist aber fuer beliebiges l

  $$d(x_n^{(k)}, x_n^{(n)}) \leq d(x_n^{(k)}, x_l^{(k)}) + d(x_l^{(k)}, x_l^{(n)}) + d(x_l^{(n)}, x_n^{(n)}).$$

  Es ist nun fuer $l \geq n$ der erste und dritte Term durch $1/n$ beschraenkt. Der mittlere Term konvergiert fuer $l \to \infty$ gegen $\widehat{d}(p_k, p_n)$. Damit erhaelt man insgesamt also

  $$d(x_n^{(k)}, x_n^{(n)}) \leq \frac{1}{n} + \widehat{d}(p_k, p_n) + \frac{1}{n}.$$

  Im Grenzwert $n \to \infty$ wird dann daraus

  $$\widehat{d}(p_k, [(x_l^{(l)})]) \leq \lim_{n\to\infty} \widehat{d}(p_k, p_n).$$

'Eindeutigkeit.' (Nur Skizze (...)) Uebung. □

2. Topologie

In diesem Abschnitt geht es um einen qualitativen Begriff von Abstand. Dieser wird uns wieder erlauben, Konvergenz und Stetigkeit zu definieren. Die Betrachtungen zu metrischen Raeumen erweisen sich als Spezialfaelle.

DEFINITION. *(Topologie) Sei X eine nichtleere Menge. Eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heisst Topologie auf X, wenn gilt:*

- (T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
- (T2) *Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ gehoert wieder zu $\mathcal{T}$ (d.h. $U_j \in \mathcal{T}$, $j = 1, \ldots, n \Longrightarrow \cap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{T}$).*
- (T3) *Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ gehoert wieder zu $\mathcal{T}$ (d.h. $U_\iota \in \mathcal{T}$, $\iota \in I \Longrightarrow \cup_{\iota \in I} U_\iota \in \mathcal{T}$).*

Die Mengen aus $\mathcal{T}$ heissen offene Mengen. Eine Menge $A \subset X$ heisst abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist. Ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie auf X heisst topologischer Raum.

Interpretation. Die offenen Mengen sind die 'schoenen' Mengen. Sie haben die Eigenschaft, dass um jeden ihrer Punkte Platz ist.

Bemerkung.

- Abgeschlossenheit ist stabil unter endlichen Vereinigungen und beliebigen Schnitten. (Bew. klar, da Komplement....)
- Eine Menge in einem topologischen Raum muss nicht offen oder abgeschlossen sein.

Notation. Ist X ein topologischer Raum, so sagt man, dass $x \in X$ diskret liegt, wenn $X \setminus \{x\}$ abgeschlossen (aequivalent $\{x\}$ offen) ist.

Beispiele - Extremfaelle: Sei X beliebig.

- Das System aller Teilmenge $P(X)$ definiert eine Topologie auf X, die sogenannte diskrete Topologie. (Alle Punkte liegen diskret.)
- Das System $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ gibt eine Topologie auf X, die sogenannte indiskrete Topologie.

Beispiel - Metrischer Raum: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \mathcal{T}_d &:= \{V \subset X : \forall x \in V \exists r_x > 0 \,\text{mit}\, U_{r_x}(x) \subset V\} \\ &= \{V \subset X : V \text{ ist Umgebung jedes seiner Punkte}\} \end{aligned}$$

eine Topologie. Sie heisst die durch d erzeugt Topologie. Bezueglich dieser Topologie ist $U_r(x)$ offen und $B_r(x)$ abgeschlossen fuer beliebige $x \in X$ und $r \geq 0$.

Beweis. Wir weisen zunaechst die Eigenschaften $(T1), (T2), (T3)$ nach.
Es sind $(T1)$ und $(T3)$ einfach nachzuweisen. Nun zu $(T2)$: Seien $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T}$ und $V := \cap_{j=1}^n V_j$. Fuer $x \in V$ gilt $x \in V_j$ fuer alle j. Wegen $V_j \in \mathcal{T}$

existieren also $r_j > 0$ mit $B_{r_j}(x) \subset V_j$. Sei $r := \min\{r_j : j = 1, \ldots, n\}$. Dann gilt $B_r(x) \subset B_{r_j}(x) \subset V_j$ fuer alle j und daher

$$B_r(x) \subset V.$$

Das beweist $(T2)$.

Ende der 2. Vorlesung

Nun zur Offenheit von $U_r(x)$: Diese folgt aus der Dreiecksungleichung: Ist $y \in U_r(x)$, so gilt $d(y,x) < r$. Damit folgt Dreiecksungleichung / Zeichnung mit $s := r - d(x,y) > 0$ also

$$U_s(y) \subset U_r(x).$$

Nun zur Abgeschlossenheit von $B_r(x)$: Es ist die Offenheit des Komplementes zu zeigen. Diese folgt wieder aus der Dreiecksungleichung: Sei $y \notin B_r(x)$. Dann gilt also $d(x,y) > r$. Damit gilt nach Dreiecksungleichung / Zeichnung fuer $s := d(x,y) - r$ also

$$U_s(y) \subset X \setminus B_r(x).$$

Da $y \in X \setminus B_r(x)$ beliebig war folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die diskrete Topologie wird durch die diskrete Metrik erzeugt (Warum? Kugeln mit Radius 1/2 sind gerade die Punkte...). Hat X mehr als einen Punkt, so gibt keine Metrik, die die indiskrete Topologie erzeugt (Warum? Indiskrete Topologie ist nicht hausdorffsch...)

DEFINITION. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heisst separiert oder hausdorffsch, wenn zu allen $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Beispiel. Jeder metrische Raum (X, d) ist hausdorffsch. (Bew. $x \neq y$, also $\delta = d(x,y) > 0$. Waehle offene $\delta/2$ Kugeln um x und y.
In topologischen Raeumen haben wir ein allgemeines Konzept von Umgebung.

DEFINITION. *(Umgebung in topologischen Räumen) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heisst ein $V \subset X$ eine Umgebung von $x \in X$, wenn ein $U \in \mathcal{T}$ existiert mit*

$$x \in U \subset V.$$

Die Menge aller Umgebungen von $x \in X$ wird mit $\mathcal{U}_x$ bezeichnet.

Bemerkung. Ist V Umgebung von x und $V \subset W$, so ist auch W Umgebung von x (d.h. Umgebung ist stabil unter Vergroesserung).

Beispiel - metrischer Raum. Ist (X, d) ein metrischer Raum mit durch d erzeugter Topologie $\mathcal{T}$, so sind die Umgebungen im Sinne der Metrik gerade die Umgebungen im Sinne der Topologie. (Denn ein U ist nach beiden Definitionen genau dann eine Umgebung von x, wenn ein $r > 0$ existiert mit $x \in U_r(x) \subset U$.)

LEMMA. *(Umgebung und Toplogie) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann gehoert eine Teilmenge U von X genau dann zu $\mathcal{T}$, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.*

Beweis. Es gehoere U zu $\mathcal{T}$. Dann ist U also offen. Wegen $x \in U \subset U$ ist also U Umgebung jedes seiner Punkte.
Es gebe umgekehrt zu jedem $x \in U$ eine offene Menge V_x mit $x \subset V_x \subset U$. Dann ist also

$$U = \bigcup V_x$$

offen als Vereinigung von offenen Mengen. □

DEFINITION. *$(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. $M \subset X$ beliebig. Dann heisst*

$$M^\circ := \bigcup_{U \subset M, U\, offen} U$$

das Innere oder der offene Kern von M und

$$\overline{M} := \bigcap_{M \subset A, A\ abg.} A$$

der Abschluss oder die abgeschlossene Huelle von M und

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$$

der Rand von M

Bemerkung.

- Es ist M° die groesste offene Teilmenge, die in M enthalten ist. (Vereinigung von offenen Mengen ist offen.) Insbesondere stimmt jede offene Menge mit ihrerem Inneren ueberein.
- Es ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthaelt. Insbesondere stimmt jede abgeschlossene Menge mit ihrer Huelle ueberein.
- Es gilt (siehe Uebung):

$$M^\circ = \{x \in X : M \text{ ist Umgebung von } x\}.$$

$$\overline{M} = \{x \in X : \text{jede Umgebung von } x \text{ enthaelt Punkt von } M\}.$$

$$\partial M = \{x \in X : \text{fuer jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap M \neq \emptyset \text{ und } U \cap X \setminus M \neq \emptyset\}.$$

Beispiel.

- Betrachte $\mathbb{K}^m$ mit der Euklidischen Metrik und der induzieren Topologie. Dann ist das Innere von $B_r(x)$ gerade $U_r(x)$ und der Abschluss von $U_r(x)$ ist $B_r(x)$.
- Fuer jeden metrischen Raum gilt, dass $U_r(x)$ enthalten ist im Inneren von $B_r(x)$ (da $U_r(x)$ offen) und, dass der Abschluss von $U_r(x)$ enthalten ist in $B_r(x)$ (da $B_r(x)$ abgeschlossen). Dabei kann die erste Inklusion eine Gleichheit sein und die zweite strikt! (Uebung.
  - X = abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $X = B_1(0)$ offen, also sein Inneres.

  - $X =$ abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ ohne eine punktierte Umgebung von $(1,0)$. Dann enthaelt der Abschluss von $U_1(0)$ nicht den Punkt $(1,0)$. Er gehoert aber zu $B_1(0)$.)
- Sei $\mathbb{R}$ mit der durch die Euklidische Metrik erzeugten Topologie versehen. Dann ist $\mathbb{R}$ der Rand von $\mathbb{Q}$. (Uebung)

Im metrischen Raum gelten noch folgende nuetzliche Eigenschaften fuer den Abschluss (Uebung).

LEMMA. *(Charakterisierung des Abschluss im metrischen Raum) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ gegeben. Es ist*

$$\overline{M} = \{x \in X : \text{ es existiert eine Folge } (x_n) \text{ in } M \text{ mit } x_n \to x\}.$$

Insbesondere ist M genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder (in X) konvergenten Folge aus M wieder in M liegt.

LEMMA. *(Abgeschlossenheit und Vollstaendigkeit von Teilmengen metrischer Raeume). Sei (X,d) ein vollstaendiger metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist M eine abgeschlossene Teilmenge von X.*
(ii) *Es ist der metrische Raum (M,d) vollstaendig.*

Wir kommen nun zur Stetigkeit von Funktionen. Dazu fuehren wir folgende Definition ein. Die Definition ist so gemacht, dass sich im Falle von metrischen Raeumen gerade die dort besprochenen Stetigkeit ergibt.

DEFINITION. *Seien $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2)$ topologische Raeume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Abbildung.*
(a) Es heisst f stetig in $x \in X_1$, wenn fuer alle Umgebungen V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit $f(U) \subset V$.
(b) Es heisst f stetig, wenn es in jedem Punkt stetig ist.

Bemerkung. In der Situation der Definition ist f genau dann stetig in $x \in X_1$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist (wie man sich leicht klarmacht).

THEOREM. *(Charakterisierung Stetigkeit) Seien $(X_1,\mathcal{T}_1)$, $(X_2,\mathcal{T}_2)$ topologische Raeume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ eine Abbildung. Dann sind aequivalent:*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Die Urbilder offener Mengen unter f sind offen, d.h. fuer jedes $V \in \mathcal{T}_2$ gehoert $f^{-1}(V)$ zu $\mathcal{T}_1$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $V \in \mathcal{T}_2$ beliebig und $U := f^{-1}(V)$. Zu zeigen: U ist Umgebung von jedem $x \in U$. Sei also $x \in U$ beliebig. Dann folgt $f(x) \in V$. Da V offen ist, ist es eine Umgebung von $f(x)$ und damit folgt nach (i) die Existenz einer Umgebung U_x von x mit

$$f(U_x) \subset V.$$

Damit folgt also $x \in U_x \subset U$ (nach Definition von U). Damit ist U Umgebung von x.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Zu zeigen: f ist stetig in jedem $x \in X_1$. Sei also $x \in X_1$ beliebig. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert also eine offene Menge W mit

$$f(x) \in W \subset V.$$

Nach (ii) ist dann $U := f^{-1}(W)$ offen. Weiterhin gilt nach Definition $x \in U$. Damit ist also U eine Umgebung von x mit $f(U) \subset W \subset V$. □

Bemerkung. In allgmeinen topologischen Raeumen gibt es keine Charakterisierung der Stetigkeit mittels Folgen. Es gilt allerdings immer noch, dass stetige Funktionen konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbilden. (Hierbei heisst im topolotischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Folge (x_n) in X konvergent gegen $x \in X$, wenn zu jeder Umgebung U von x ein $N_U \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ fuer alle $n \geq N_U$.) Die Umkehrung gilt nicht mehr. Man muss statdessen mit 'Netzen' arbeiten.

LEMMA. *Sind $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, 3$ topologische Raeume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$, $g : X_2 \longrightarrow X_3$ stetig, so ist auch $g \circ f : X_1 \longrightarrow X_3$ stetig.*

Beweis. Sei $U \subset X_3$ offen. Wegen der Stetigkeit von g ist dann $g^{-1}(U)$ offen. Damit ist dann auch $f^{-1}(g^{-1}(U)))$ offen wegen der Stetigkeit von f. Damit ist also

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

offen in X_1. □

Fuer gewisse Anwendungen ist es nuetzlich, Topologien zu vergleichen. Das studieren wir als nachstes.

DEFINITION. *Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Dann heisst $\mathcal{T}_1$ feiner / staerker als $\mathcal{T}_2$ wenn gilt $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. Es heisst dann $\mathcal{T}_2$ groeber / schwaecher als $\mathcal{T}_1$.*

Bemerkung.

- Die feinste Topologie auf X enthaelt alle Teilmengen. Die groebste Topologie auf X enthaelt nur X und $\emptyset$.
- Es ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ genau dann, wenn die Identitaet

  $$Id : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2), \;\; x \mapsto x.$$

  stetig ist.

Beispiel - Metrische Raeume. Sei X eine Menge und d_1, d_2 Metriken auf X mit erzeugten Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$. Dann ist $\mathcal{T}_1$ genau dann feiner als $\mathcal{T}_2$, wenn fuer jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $B_\delta^{d_1}(x) \subset B_\varepsilon^{d_2}(x)$. (Denn: diese Bedingung ist gerade die Stetigkeit der Identitaet $I : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$.) Erzeugen d_1 und d_2 dieselbe Topologie, so heissen d_1 und d_2 (topologisch) aequivalent. Es gilt (Uebung):

- Ist (X, d) ein metrischer Raum, so definiert $e(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine zu d aequivalente Metrik auf X. Es ist e beschraenkt durch 1. Das bedeute insbesondere, dass Beschraenktheit der Metrik keine besondere Bedeutung hat.

- Auf $\mathbb{R}$ sind die beiden Metriken $d(x,y) = |x-y|$ und $e(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ aequivalent. Es ist $(\mathbb{R}, d)$ vollstaendig und $(\mathbb{R}, e)$ nicht vollstaendig. Das bedeutet insbesondere, dass Vollstaendigkeit eine Eigenschaft der Metrik ist und nicht der durch sie erzeugeten Topologie.

Wir widmen uns nun noch der Erzeugung von Topologien.

LEMMA. *(Erzeugen von Topologien durch Mengen von Teilmengen) Sei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Menge von Teilmengen von X. Dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{O})$ mit*

- *$\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$,*
- *ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie mit $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}'$ so gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

(Es ist also $\mathcal{T}$ die groebste Topologie, die $\mathcal{O}$ enthaelt.)

Beweis. Eindeutigkeit folgt sofort aus der zweiten Eigenschaft. (Eventuell Details: Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ solche Topologien. Dann enthalten beide $\mathcal{O}$ nach der ersten Eigenschaft und mit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}'$ folgt aus der zweiten Eigenschaft $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Vertauschen liefert auch die umgekehrte Inklusion.)
Existenz: Betrachte

$$S := \{\mathcal{T}' : \mathcal{T}' \text{ Topologie mit } \mathcal{O} \subset \mathcal{T}'\}.$$

Dann ist S nichtleer, da $P(X) \in S$. Zeige nun

$$\mathcal{T} := \{A \subset X : A \in \mathcal{T}' \text{ fuer alle } \mathcal{T}' \text{ aus } S\}$$

ist eine Topologie. (Das folgt durch einfaches Nachrechnen von $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$. Nur muendlich.) Dann erfuellt τ die gewuenschten Eigenschaften. □

DEFINITION. *Sei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Menge von Teilmengen von X. Dann heisst die im Lemma beschriebene Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ die von $\mathcal{O}$ erzeugte Topologie.*

Ende der Vorlesung.

Oft moechte man Topologien erzeugen, die gewisse Funktionen stetig machen. Dazu dient eine Folgerung des vorigen Lemma.

FOLGERUNG. *Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen $f : X \longrightarrow (Y_f, \mathcal{T}_f)$ von X in den topologischen Raum $(Y_f, \mathcal{T}_f)$. Dann gibt es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigenschaften:*

- *Alle $f \in \mathcal{F}$ sind stetig.*
- *Ist $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf X, so dass alle $f \in \mathcal{F}$ stetig werden, so gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.*

Diese Topologie heisst die von $\mathcal{F}$ erzeugte Topologie. (Es ist also $\mathcal{T}$ die groebste Topologie, die alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ stetig macht.)

Beweis. Sei

$$\mathcal{O} := \{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{T}_f\}.$$

Dann sind alle $f \in \mathcal{F}$ stetig bzgl. der von $\mathcal{O}$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{O})$. Sind umgekehrt alle $f \in \mathcal{F}$ stetig bzgl. der Topologie $\mathcal{T}'$, so folgt

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{T}'$$

und damit $\mathcal{T}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{T}'$. $\square$

Bemerkung. Das Lemma und sein Korollar liefern einen deutlichen Vorteil von Topologie gegenueber Metriken: Topologien, die von Funktionen bzw. Mengen erzeugt werden, sind im allgemeinen nicht metrisierbar (s.u.).

Noch einige Begriffe.

Definition. *Ein topologischer Raum heisst separabel, wenn es eine abzaehlbare dichte Teilmenge gibt. Hierbei heisst eine Teilmenge dicht, wenn ihr Abschluss der gesamte Raum ist.*

Definition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{V}_x$ von Umgebungen von x heisst Umgebungsbasis von x, wenn fuer jede Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{V}_x$ existiert mit*

$$x \in V \subset U.$$

Bemerkung. Eine wesentliche Eigenschaft von metrischen Raeumen ist, dass jeder Punkt eine abzaehlbare Umgebungsbasis hat (z.B. $U_{1/n}(x)$, $n\mathbb{N}$.)

3. Produkte und Quotienten

In diesem Abschnitt lernen wir zwei grundlegende Konstruktionen kennen: Produkte und Quotienten.

Sei E eine Menge und F eine Aequivalenzrelation auf E. Die Klasse von $x \in E$ wird durch $[x]$ bezeichnet d.h.

$$[x] = \{y \in E : y \sim x\}.$$

Der Quotient $E/\sim$ von E nach $\sim$ ist die Menge aller Klassen und wird mit

$$E/F := E/\sim$$

bezeichnet. Die kanonische Projektion ist die Abbildung

$$\pi : E \longrightarrow E/F, x \mapsto [x].$$

Ist $\mathcal{T}$ eine Topolgie auf E, so induziert π eine Topologie, genannt Quotiententopologie, $\widetilde{\mathcal{T}}$ auf $E/\sim$ durch

$$V \in \widetilde{\mathcal{T}} :\Longleftrightarrow \pi^{-1}(V) \text{ offen.}$$

(Nachrechnen, dass $\widetilde{\mathcal{T}}$ eine Topolgie ist). Dann ist π stetig und es ist $\widetilde{\mathcal{T}}$ die feinste Topologie bzgl. derer π stetig ist.

Beh: Ist π offen, so besteht $\widetilde{\mathcal{T}}$ aus den Mengen der Form $\pi(U)$ mit $U \subset E$ offen.
Bew. Jede der Mengen $\pi(U)$ ist offen, da π offen ist. Umgekehrt gilt aufgrund der Surjektivitaet von π natuerlich $V = \pi(\pi^{-1}(V))$. Da π stetig ist, hat dann jedes offene V die gewuenschte Form.

Beispiel - Produkttopologie (2 Raeume). Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Seien $\pi_j : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_j$, $j = 1, 2$, die natuerlichen Projektionen. Dann heisst die durch π_1, π_2 erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ die Produkttopologie. Es ist offenbar $\mathcal{T}$ erzeugt durch

$$\mathcal{O} := \{U_1 \times U_2 : U_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, 2\}.$$

(Denn es gilt $\pi_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$, $\pi_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2$ und eine Topologie ist stabil unter endlichen Schnitten.) Weiterhin gilt

$$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in U \exists U_x \in \mathcal{T}_1, U_y \in \mathcal{T}_2 \ (x,y) \in U_x \times U_y. \ (*)$$

Bew. Sei $\mathcal{T}'$ die Familie von Mengen, die $(*)$ erfuellen. Dann ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie (einfach) und es gilt nach Konstruktion $\mathcal{T}' \supset \mathcal{O}$. Damit folgt also $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. Umgekehrt gilt natuerlich fuer $U \in \mathcal{T}'$

$$U = \cup_{(x,,y)\in U} U_x \times U_y \in \mathcal{T}.$$

Bemerkung - Metrisierbarkeit. (Uebung) Wird die Topologie $\mathcal{T}_i$, $i = 1,2$, durch die Metrik d_i, $i = 1,2$, erzeugt, so wird auch die Produkttopologie durch eine Metrik erzeugt, etwa durch

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2).$$

Tatsaechlich gibt es viele weitere (aequivalente) Metriken. So kann man mit jeder Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^2$ durch

$$e_{\|\cdot\|}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \|(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))\|$$

eine Metrik auf dem Produkt assoziieren, die die Produktopologie erzeugt.

Beispiel - Produkttopologie (beliebig viele Raeume). Sei $J \neq \emptyset$ und $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ topologische Raeume. Sei

$$X := \prod X_i = \{f : I \longrightarrow \cup X_i : f(i) \in X_i, i \in I\}.$$

Sei

$$\pi_i : X \longrightarrow X_i, \pi_i(x) = x(i)$$

$i \in I$, die natuerlichen Projektionen. Dann heisst die durch die π_i, $i \in I$, erzeugte Topologie die Produkttopologie. Wieder gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{O})$ mit

$$\mathcal{O} = \{\prod V_i : V_i \in \mathcal{T}_i, V_i = X_i \text{ fuer alle bis auf endlich viele } i\}.$$

Ebenso gilt wieder, dass U zu $\mathcal{T}$ gehoert, genau dann wenn es zu jedem $x \in U$ endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ und $U_{i_j} \in \mathcal{T}_{i_j}$ gibt mit

$$x \in \cap_{j=1}^n \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subset U.$$

Bemerkung - (Uebung). Seien metrische Raeume (X_j, d_j), $j \in I$, gegeben.

- Ist I abzaehlbar, also ohne Einschraenkung $I = \mathbb{N}$ und sind die Topologien auf den X_i durch Metriken d_i, $i \in \mathbb{N}$, erzeugt, so kann auch die Produkttopologie durch eine Metrik erzeugt werden, z.B. durch
$$d(x,y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j(1 + d_j(x_j,y_j))}.$$
In diesem Fall ist (X,d) vollstaendig genau, dann wenn jedes einzelne (X_j, d_j), $j \in I$, vollstaendig ist.
- Ist I eine ueberabzaehlbare Menge und hat jedes X_i mindestens zwei Elemente, so ist X nicht metrisierbar.

KAPITEL 2

Der Satz von Baire

In diesem Abschnitt lernen wir ein grundlegendes Resultat fuer vollstaendige metrische Raeume kennen. Wir werden es hauptsaechlich auf geeigneten Vektoräumen anwenden. Aber das Resultat verlangt keine Vektorraumstruktur!

Theorem. *(Satz von Baire) Sei (M, d) ein vollstaendiger metrischer Raum. Seien F_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Teilmengen von M. Gilt $M = \cup F_n$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $F_N^\circ \neq \emptyset$.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Angenommen $F_n^\circ = \emptyset$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt fuer alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$U_\varepsilon(x) \cap F_n^c \neq \emptyset. \ (*)$$

Wir konstruieren nun eine Cauchy Folge ohne Grenzwert. Dazu werden wir induktiv $x_n \in M$ und $\varepsilon_n > 0$ konstruieren mit

- $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\varepsilon_m}(x_m)$ fuer alle $n \geq m$,
- $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$,
- $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset F_n^c$.

(Dann bilden die (x_n) eine Cauchy-Folge aufgrund der ersten beiden Punkte, die aufgrund der Vollstaeendigkeit des Raumes konvergiert. Der Grenzwert x muss dann in jedem $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ liegen und gehoert damit zu keinem F_n. Widerspruch.)

Sei $x_0 \in M$ beliebig und $\varepsilon_0 = 1$. Nach $(*)$ existiert ein

$$x_1 \in F_1^c \cap U_{\varepsilon_0}(x_0).$$

Da F_1^c und U_{ε_0} offen sind, gibt es $0 < \varepsilon_1$ mit

$$U_{\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset F_1^c \cap U_{\varepsilon_0}(x_0).$$

und $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0/2$. Induktiv koennen wir dann eine Folge (x_n) in M und $\varepsilon_n > 0$ finden mit

$$U_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset F_n^c \cap U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$$

und $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1}/2$. (Wir koennen zum Beispiel ε_n und x_n mit

$$U_{2\varepsilon_n}(x_n) \subset F_n^c \cap U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$$

waehlen.) Zeichnung. Also folgt fuer $k \leq m$

$$B_{\varepsilon_m}(x_m) \subset B_{\varepsilon_{m-1}}(x_{m-1}) \subset \ldots \subset B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{k+1}) \subset U_{\varepsilon_k}(x_k).$$

Insbesondere folgt

$$d(x_k, x_m) \leq \varepsilon_k \leq \frac{1}{2^k}.$$

Damit ist (x_k) eine Cauchy Folge. Aufgrund der Vollstaendigkeit (!) existiert dann

$$x = \lim x_n.$$

Da die Folge (x_n) fuer alle grossen Indices vollstaendig in der abgeschlossenen Kugel $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ enthalten ist, gilt dies auch fuer den Grenzwert. (Denn: $d(x, x_k) = \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n) \leq \varepsilon_k$.) Es folgt also

$$x \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \subset F_k^c$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Das liefert

$$x \notin \bigcup F_n = M.$$

Dieser Widerspruch beweist die Behauptung. $\square$

Ende der Vorlesung

Bemerkung. Die Vollstaendigkeit ist eine wesentliche Voraussetzung im Satz. So kann man etwa den metrischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der Euklidischen Metrik via

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$$

als abzaehlbare Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren darstellen. Die Voraussetzung der Abzaehlbarkeit der F_n ist ebenfalls noetig. (Denn man hat natuerlich immer $M = \cup_{m\in M}\{m\}$.

Wir lernen nun noch zwei (zum Satz aequivalente) Folgerungen kennen. Dabei handelt es sich um 'durch Komplementbildung' entstehende Aussagen. Dabei ist folgender Zusammenhang zwischen einer offenen Menge U und ihrem Komplement F grundlegend:

U ist dicht genau dann, wenn F leeres Inneres hat.

(Denn: U dicht $\Longleftrightarrow$ U schneidet jede offene Kugel $\Longleftrightarrow$ keine offene Kugel ist in F enthalten $\Longleftrightarrow$ F hat leeres Inneres.

FOLGERUNG. *Sei (M, d) ein vollstaendiger metrischer Raum. Seien U_n, $n \in \mathbb{N}$, offene dichte Mengen in M. Dann ist $\cap U_n$ dicht.*

Beweis. Sei $G := \cap U_n$. Zu zeigen G ist dicht, d.h. $M \setminus G$ enthaelt keine offene Menge.

Angenommen: $U_r(x) \subset M \setminus G$ fuer ein $x \in M$ und $r > 0$. Dann gelte ohne Einschraenkung (sonst r verkleinern) $\overline{U_r(x)} \subset M \setminus G$.

Sei $\widetilde{M} := \overline{U_r(x)}$. Dann ist $(\widetilde{M}, d)$ ein vollstaendiger metrischer Raum und es gilt

$$\widetilde{M} = (M \setminus G) \cap \widetilde{M} = \bigcup_n (M \setminus U_n) \cap \widetilde{M}.$$

Als Schnitt zweier abgeschlossener Teilmengen von M ist $(M \setminus U_n) \cap \widetilde{M}$ abgeschlossen in M und damit auch in $\widetilde{M}$. Also existiert nach dem Satz von Baire ein $\delta > 0$ und $y \in \widetilde{M}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$U_\delta^{\widetilde{M}}(y) \subset (M \setminus U_N) \cap \widetilde{M}.$$

(Hier bezeichnet $U_\delta^{\widetilde{M}}(y)$ die Kugel in $\widetilde{M}$.) Dann erfuellt die offene und nichtleere (da $y \in \overline{U_r(x)}$) Menge $U_\delta(y) \cap U_r(x)$ die Inklusion

$$U_\delta(y) \cap U_r(x) \subset U_\delta(y) \cap \widetilde{M} = U_\delta^{\widetilde{M}}(y) \subset M \setminus U_N.$$

Damit enthaelt also $M \setminus U_N$ eine offene Menge. Das ist ein Widerspruch zur Dichtheit von U_N. □

Bemerkung. Das ist eine sehr bemerkenswerte Aussage. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{Q}+r) = \emptyset$, wenn r irrational ist. Der Schnitt von dichten Mengen ist also im allgemeinen gar nicht dicht. Wahlt man aber umgekehrt $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Abzaehlung von $\mathbb{Q}$ und definiert fuer $\varepsilon > 0$

$$Q^\varepsilon := \cup_j (q_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$$

so ist Q^ε offen und dicht (und hat 'Laenge' kleiner als 2ε). Aber es ist (trotz der kleine 'Laenge') nach dem Satz von Baire

$$\bigcap_n (\mathbb{Q}^{\varepsilon_n} + r_n)$$

dicht fuer alle Folgen (r_n), (ε_n) in $\mathbb{R}$ mit $\varepsilon_n > 0$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

FOLGERUNG. *Sei (M, d) ein vollstaendiger metrischer Raum. Seien F_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Mengen in M mit leerem Inneren. Dann hat auch $\bigcup_n F_n$ leeres Inneres.*

Beweis. Sei $U_n := F_n^c$. Dann ist U_n offen und dicht. Damit folgt die Behauptung aus der vorigen Folgerung durch Komplementbildung. □

Bemerkung. Offenbar ist der Satz von Baire eine Folgerung aus der vorigen Folgerung. Damit sind alle drei Aussagen in diesem Sinne aequivalent. Tatsaechlich ist es sehr instruktiv, direkte Beweis der Folgerungen entlang des Beweises des Satz von Baire zu geben. (Uebung.)

DEFINITION. *Sei (M, d) ein vollstaendiger metrischer Raum. Eine Teilmenge B von M heisst dichte G_δ-Menge, wenn sie ein abzaehlbarer Schnitt von offenen Mengen ist. Eine Teilmenge D heisst F_σ-Menge, wenn sie eine abzaehlbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist.*

Interpretation. Offenheit ist mit endlichen Schnitten vertraeglich und Abgeschlossenheit mit endlichen Vereinigungen. In diesem Sinne sind die abzaehlbaren Operationen das naechstbeste.

FOLGERUNG. *(Abzaehlbare Schnitte dichter G_δ-Mengen ist dichte G_δ-Menge) Sei (M, d) ein vollstaendiger metrischer Raum. Dann ist ein abzaehlbarer Schnitt von dichten G_δ-Mengen wieder ein dichte G_δ-Menge.*

Beweis. Offenbar ist ein abzaehlbarer Schnitt von G_δ Mengen wieder eine G_δ Menge. Er ist dicht nach einer Folgerung aus dem Satz von Baire. □

Interpretation. Es gibt verschiedene Arten die Groesse einer Menge zu messen. Im topologischen Kontext gelten oft dichte G_δ-Mengen als gross. Ihre Elemente werden dann als typisch oder generisch bezeichnet. Damit spielen dichte G_δ-Mengen in der Topologie eine aehnliche Rolle wie Mengen von vollem Mass in der Masstheorie.

Ende der Vorlesung

Wir diskutieren nun einige prominente G_δ-Mengen und allgemeine Eigenschaften von G_δ-Mengen.

Beispiele. (a) Die irrationalen Zahlen sind eine dichte G_δ-Menge in $(\mathbb{R}, euklidischer Abstand)$.
Bew. Sei q_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Abzaehlung von $\mathbb{Q}$. Sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U_n := \mathbb{R} \setminus \{q_n\}.$$

Dann ist jedes U_n dicht und offen und die Menge der irrationalen Zahlen gerade der Schnitt ueber alle U_n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Menge der nirgends differenzierbaren stetig Funktionen auf $[0,1]$ ist eine dichte G_δ-Menge.
Der Beweis ist nicht einfach. Eine wichtige Idee ist es, geeignete Funktionen mit vielen 'Zacken' zu konstruieren.

(c) Sei (f_n) eine Folge von Stetigen Funktionen auf dem vollstaendigen metrischen Raum (M,d), die punktweise gegen die Funktion f konvergieren. Dann ist die Menge der Stetigkeitspunkte von f eine dichte G_δ-Menge.
Bew. (Uebung).
(d) Aufdickung von $\mathbb{Q}$. ($\mathbb{Q}$ selber ist keine G_δ-Menge, denn dicht und Komplement ist G_δ-Menge).

Die Beispiele zeigen, dass es oft sehr schwer sein kann Element von G_δ-Mengen anzugeben (auch wenn diese typische Eigenschaften haben).

Wir kommen nun zu allgemeinen Eigenschaften von G_δ-Mengen.

- Das Urbild einer G_δ Menge unter einer stetigen Funktion ist wieder eine G_δ Menge.
- Der Schnitt einer G_δ-menge mit einer offenen Menge ist eine G_δ-Menge.
- Ist G eine dichte G_δ Menge, so ist ihr Komplement keine dichte G_δ-Menge (wenn der Raum vollstaendig ist). Bew. ;-)
- ist (M,d) vollstaendiger metrischer Raum und abzaehlbar, so liegt mindestens ein Punkt aus M diskret.

  Bew. $M = \cup_{m \in M}\{m\}$. Nun Anwenden des Satz von Baire.
- Ist (M,d) vollstaendiger metrischer Raum ohne diskrete Punkte, so ist M ueberabzaehlbar.

  Bew. vorige Aussage.
- Ist (M,d) vollstandiger metrischer Raum ohne diskrete Punkte. Dann ist jede dichte G_δ-Menge in M ueberabzaehlbar.

  Bew. Angenommen $G = \{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ G_δ-Menge. Sei

  $$G_k := G \setminus \{g_k\} := G \cap \{g_k\}^c.$$

  Dann ist G_k dicht (da M keine diskreten Punkte hat) und eine G_δ Menge (als Schnitt einer offenen und einer G_δ-Menge). Daher ist dann auch

  $$\cap G_k = \emptyset$$

  eine dichte Menge. Widerspruch.

Wir beenden den Abschnitt mit einer Diskussion einer (frueher) ueblichen Formulierung des Satzes von Baire. Eine Menge A des metrischen Raumes (M, d) heisst nirgends dicht, wenn $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. Eine Menge D heisst von erster Kategorie, wenn sie eine abzaehlbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Eine Menge heisst von zweiter Kategorie, wenn sie nicht von erster Kategorie ist. Damit laesst sich der Satz so umformulieren:

Bairescher Kategoriensatz. Jeder vollstaendige metrische Raum ist von zweiter Kategorie in sich selbst.

Bemerkung. Fuer lokalkompakte hausdorff Raeume gilt der Satz von Baire ebenfalls mit (im wesentlichen) dem selben Beweis, den wir oben gegeben haben. Wir verzichten auf weitere Diskussion (da wir nicht einmal das Konzept des lokalkompakten Raumes hier eingefuehrt haben).

KAPITEL 3

Topologische Vektorraeume, lineare Operatoren und Dualraeume

Es geht um Vektorraume, deren Topologie mit den Vektoropertionen vetraeglich ist. Wir schreiben $\mathbb{K}$ fuer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition. *(a) Ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$ ist eine Menge E zusammen mit einer Abbildung $+ : E \times E \longrightarrow E$ und $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ so dass gilt*

- $(E, +)$ *ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0.
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- $1x = x$

(b) Eine nichtleere Teilmenge F von E heisst Unterraum, wenn $\lambda x+\mu y \in F$ fuer alle $x, y \in F$ und $\lambda, \mu \in KK$.

(c) Sind E, F Vektorraeume ueber $\mathbb{K}$. Dann heisst $T : E \longrightarrow F$ linear, wenn gilt

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T x + \mu T y$$

fuer alle $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in K$.

Beispiele.

- K^n ist ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{C}^m$ ist ein Vektorraum ueber $\mathbb{C}$ (und ueber $\mathbb{R}$).
- Fuer nichtleeres J sei
$$\mathbb{K}^J := \{x : J \longrightarrow \mathbb{K}\}$$
mit punktweiser Addition und Multiplikation (d.h. $(x + y)(i) = x(i)+y(i)$ und $(\lambda x)(i) = \lambda x(i)$). Dann ist $\mathbb{K}^J$ ein Vektorraum. Ueblicherweise schreibt man (x_j) statt $x : J \longrightarrow \mathbb{K}$. Ist $J = \{1, \ldots, n\}$ so erhaelt man gerade $\mathbb{K}^n$.
- Fuer $J \neq \emptyset$ sei
$$\ell^\infty(J) = \ell^\infty(J, \mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}^J : \sup_{j\in J} |x(j)| < \infty\}$$
mit der von K^J geerbten Addition und Multiplikation.
- Raeume von Funktionen: $C([0, 1])$, $C_c(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definition. *Sei E ein Vektorraum, M eine nichtleere Teilmenge von E. Dann heisst M linear unabhaengig, wenn*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

mit paarweise verschiedenen $x_1, \ldots, x_n \in M$ *nur moeglich ist falls* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$.

PROPOSITION. *Sei* E *ein Vektorraum und* $M \subset E$. *Dann gilt*

$$\bigcap_{F \text{ Unterraum mit } M \subset F} F = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in M, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Diese Menge wird als die lineare Huelle von M *bezeichnet und mit* $lin(M)$ *notiert.*

Beweis. '$\subset$': Rechte Seite ist ein Unterraum, der M enthaelt.

'$\supset$': Ist F ein Unterraum, der M enthaelt, so muss er die rechte Seite enthalten. □

Beispiel. (Uebung) Betrachte in $\mathbb{K}^J$ die Vektoren $e_j : J \longrightarrow \mathbb{K}$, $e_j(i) = \delta_{i,j}$. Dann ist $M = \{e_j : j \in J\}$ linear unabhaengig. Was ist $linM$? Wann gilt $M = \mathbb{K}^J$?

DEFINITION. *Eine Teilmenge* M *eines Vektorraumes heisst (algebraische) Basis, wenn sie linear unabhaengig ist und ihre lineare Huelle der ganze Raum ist.*

Bemerkung. (Uebung)

- Man kann (mithilfe des weiter unten eingefuehrten Zornschen Lemma) zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.
- Wir werden spaeter sehen, dass unter gewissen (recht allgemeinen) Bedingungen an den Vektorraum aus dem Satz von Baire folgt, dass Basen ueberabzaehlbar sind.

Uns wird es um Vektorraeume gehen, die auch topologische Raeume sind, so dass Topologie und Vektorraumoperationen miteinander vertaeglich sind.

DEFINITION. *(Vektorraumtopologie) Eine Topologie* $\mathcal{T}$ *auf einem Vektorraum* E *heisst mit den linearen Operationen vertraeglich oder kurz Vektorraumtopologie, wenn die beiden Abbildungen*

$$A : E \times E \longrightarrow E, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$M : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

stetig sind. Dabei sind $E \times E$ *und* $\mathbb{K} \times E$ *mit der Produkttopologie versehen. Ist* $\mathcal{T}$ *eine Vektorraumtopologie auf* E, *so heisst* $(E, \mathcal{T})$ *ein topologischer Vektorraum.*

Beispiele. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ mit der ueblichen Topologie. Hintergrundinformation: Auf $\mathbb{R}^d$ und C^d gibt es genau eine hausdorffsche Vektorraumtopologie.

Die Topologie in topologischen Vektorraeumen 'sieht ueberall gleich aus'. Dazu werden wir jetzt einige praezise Aussagen kennenlernen.

LEMMA. *Sei $(E,\mathcal{T})$ topologischer Vektorraum, $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann sind die Abbildungen*

$$A_v : E \longrightarrow E,\ x \mapsto v + x$$

$$M_\lambda : E \longrightarrow E,\ x \mapsto \lambda x$$

Homoeomorphismen (d.h. stetig und bijektiv mit stetiger Inverser).

Beweis. *Zu A_v*: Offenbar ist die Abbildung $E \longrightarrow E \times E, x \mapsto (x, v)$ stetig. Aus der Stetigkeit von A folgt dann sofort die Stetigkeit von A_v als Komposition stetiger Abbildungen.
Es ist A_v bijektive mit Inverser ist A_{-v}. Diese ist stetig mit analogem Beweis.
Zu M_λ. Aehnlich. □

FOLGERUNG. *Seien $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $B \subset E$.*
(a) Dann sind aequivalent:

(i) *Es ist B offen.*
(ii) *Es ist $v + B$ offen fuer ein / alle $v \in E$.*
(iii) *Es ist λB offen fuer ein / alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

(b) Dann sind aequivalent:

(i) *Es ist B Nullumgebung.*
(ii) *Es ist $v + B$ Umgebung von v fuer ein / alle $v \in E$.*
(iii) *Es ist λB Nullumgebung fuer ein / alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Beweis. Das folgt einfach aus da A_v und M_λ Homoeomorphismen sind. □

LEMMA. *(Charakterisierung Stetigkeit linearer Abbildungen) Seien $(E,\mathcal{T}_E)$ und $(F,\mathcal{T}_F)$ topologische Vektorraeume und $T : E \longrightarrow F$ linear. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist T stetig.*
(ii) *Es ist T stetig bei 0.*

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: klar.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei $x \in E$ beliebig. Sei V_{Tx} eine Umgebung von Tx. Dann ist $-Tx + V_{Tx}$ eine Umgebung von $0 \in F$. Daher existiert nach (i) eine Umgebung U von $0 \in E$ mit

$$TU \subset -Tx + V_{Tx}$$

Dann ist $x + U$ eine Umgebung von x mit

$$T(x + U) = Tx + TU \subset V_{Tx}.$$

□

Ende der Vorlesung

In einem topologischen Vektorraum implizieren schwache Trennungseigenschaften schon starke Trennungseigenschaften.

PROPOSITION. *Sei $(E,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Aequivalent:*

(i) *$(E,\mathcal{T})$ ist hausdorffsch.*
(ii) *Jeder Punkt von E ist abgeschlossen.*
(iii) *Der Nullpunkt ist abgeschlossen.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $x \in E$ beliebig. Zu zeigen: $E \setminus \{x\}$ ist offen. Zu $y \in E \setminus \{x\}$ gibt es nach (i) offene Umgebungen U_x von x und U_y von y mit

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

(Zeichnung). Insbesondere $x \notin U_y$. Damit ist

$$E \setminus \{x\} = \cup_{y \in E \setminus \{x\}} U_y$$

offen. (Diese Implikation hat nichts mit der Vektorraumstruktur zu tun.)
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $x \neq y$ und x abgeschlossen. Dann ist also $E \setminus \{x\}$ offen und $y = y + 0 \in E \setminus \{x\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Addition existieren dann Umgebungen U_y von y und V von 0 mit

$$U_y + V \subset E \setminus \{x\}.$$

Dann ist aber $x + (-V)$ eine Umgebung von x, die U_y nicht schneidet. (Sonst: $x - v = y'$ mit $y' \in U_y$ und $v \in V$, also $x = y' + v \in U_y + V \subset E \setminus \{x\}$.) $\square$

Ein wesentliches Bestandteil beim Studium von Vektorraumen und linearen Abbildungen sind die linearen Abbildungen in den zugrundeliegenden Koerper.

Definition. *Seien $(E, \mathcal{T}_E)$ und $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Vektorraeume ueber $\mathbb{K}$. Dann bezeichnet man die Menge der stetigen linearen Abbildungen von E nach F mit $\mathcal{L}(E, F)$. Es heisst*

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \{\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ linear und stetig}\}$$

der Dualraum von E. Die Menge

$$E^* := \{\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ linear}\}$$

heisst der algebraische Dualraum von E.

Bemerkung. Ist der topologische Vektorraum $(E, \mathcal{T}_E)$ unendlichdimensional, so kann man mit dem Zornschen Lemma (s.u.) die Existenz von unstetigen linearen Funktionalen auf E zeigen (Uebung).

Das folgende ist eine oft nuetzliche Charakterisierung der Stetigkeit von Funktionalen.

Lemma. *(Das Stetigkeitskriterium fuer lineare Funktionale) Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linear. Dann ist φ genau dann stetig, wenn sein Kern abgeschlossen ist.*

Bemerkung. Stetigkeit von φ ist nach allgemeinen Saetzen aquivalent dazu, dass das Urbild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist. Es ist daher sehr bemerkenswert, dass tatsaechlich nur das Urbild einer einzigen noch dazu einpunktigen Menge auf Abgeschlossenheit getestet werden muss.
Beweis. Ist φ stetig, so ist $Ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen.
Sei umgekehrt $F := Ker\varphi$ ein abgeschlossener Unterraum von E. Wir zeigen die Stetigkeit von φ in 0. Ist $\varphi = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also φ nicht das Nullfunktional. Dann gibt es also ein $v \in E$ mit $\varphi(v) \neq 0$ und - ohne Einschraenkung - $\varphi(v) = 1$. Dann kann man jedes $x \in E$ (eindeutig) schreiben als

$$x = \alpha v + f$$

mit $\alpha = \varphi(x)$ und $f \in F$ (wie man leicht sieht).

Idee. Aufgrund der Stetigkeit der Vektorraumoperationen und der Abgeschlossenheit von F unterscheiden sich die Punkte in der Naehe von x in ihrer v-Koordinate nur wenig von α.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Waehle eine Umgebung V von 0 mit

$$(v - sV) \cap F = \emptyset$$

fuer alle $s \in B_{1/\varepsilon}(0)$ (Das folgt, da F abgeschlossen ist und die Multiplikation stetig, s.u.). Dann gilt fuer alle $x \in V$, dass $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$. (Andernfalls:

$$x = \alpha v + f \in V$$

mit $|\alpha| > \varepsilon$ und $f \in F$. Also

$$-\frac{1}{\alpha} f = v - \frac{1}{\alpha} x \in (v - sV) \cap F = \emptyset.$$

Widerspruch.)

Noch zu !: Waehle Nullumgebung U mit $(v-U) \cap F = \emptyset$. Wegen $00 = 0 \in U$ folgt aus Stetigkeit der Multiplikation die Existenz eines $\varrho > 0$ und einer Nullumgebung W mit $sW \subset U$ fuer alle $s \in B_\varrho$. Dann hat

$$V := \varepsilon \varrho W$$

die gewuenschten Eigenschaften. □

Idee. Ein lineares Funktional φ auf dem Vektorraum E ist im wesentlichen durch seinen Kern bestimmt. Tatsaechlich ist es bei gegebenem Kern vollstaendig bekannt, wenn noch der Wert auf einem einzigen Vektor bekannt ist, auf dem es nicht verschwindet. In diesem Sinne entsprechen Lineare Funktionale gerade Unterraeumer der Kodimension Eins (d.h. Unterraeumen deren Vereinigung mit einem weiteren Vektor den ganzen Raum aufspannt). Die stetigen Funktionale ensprechen dann abgeschlossenen Unterraeumen. *Zeichnung.*

bigskip

Bemerkung zur Relevanz der Unendlichdimensionalitaet in unseren Betrachtungen (vgl. Uebung): Entscheidend ist folgende Beobachtung: Jeder endlichdimensionale Teilraum eines topologischen Vektorraumes, der hausdorffsch ist, ist abgeschlossen. (Beweis durch Induktion nach der Dimension, beginnend mit der Dimension 0...).

Auf einem endlichdimensionalen topologischen Vektorraum, der hausdorffsch ist, sind dann alle linearen Funktionale stetig. (Da der Kern eines jeden linearen Funktional dann endlichdimensional also abgeschlossen ist, folgt aus dem oben diskutierten die Stetigkeit.) Dieser Schluss laesst sich noch etwas verallgemeinern: Ist $(E, \mathcal{T}_E)$ ein topologischer Vektorraum mit Basis $e_1, \ldots, e_N$ fuer ein $N \in \mathbb{N}$, so ist

$$\Phi : \mathbb{K}^N \longrightarrow E,\ x \mapsto \sum_{j=1}^N x_j e_j$$

ein Homeomorphismus, wobei $\mathbb{K}^N$ die durch den Euklidischen Abstand induzierte Topologie traegt.

(Bew. Offenbar ist Φ linear und bijektiv (e_j sind Basis). Aus der Stetigkeit der Skalaren Multiplikation folgt leicht, dass Φ stetig ist (als Summe von stetigen Abbildungen). Dieser Teil der Aussage nutzt nicht die Hausdorffeigenschaft von $\mathcal{T}_E$. Es bleibt die Stetigkeit der Inversen von Φ zu zeigen und dazu wird die Hausdorffeigenschaft benoetigt. Sei

$$\psi_k : E \longrightarrow \mathbb{K},\ \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \mapsto x_k$$

fuer $k = 1, \ldots, N$. Dann ist ψ_k wohldefiniert (da e_j eine Basis sind) und linear. Damit ist die Abbildung stetig (da nach dem gerade diskutierten auf einem endlichdimensionalen hausdorfschen toplogischen Vektorraum alle linearen Funktionale stetig sind). Damit ist $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N) : E \longrightarrow \mathbb{K}^N$ stetig. Offenbar ist Ψ die Inverse von Φ.)
Insgesamt ergibt sich dann leicht folgendes:

THEOREM. *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum gibt es genau eine hausdorffsche Vektorraumtopologie und jede beliebige lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen hausdorffschen topologischen Vektorraeumen ist stetig.*

Wir diskutieren nun noch zwei nuetzliche Konstruktionen: Produkte und Quotienten.

THEOREM. *Sind $(E, \mathcal{T}_E)$ und $(F, \mathcal{T}_F)$ topologische Vektorraume, so ist auch $E \times F$ mit der Produktopologie ein topologischer Vektorraum. Es kann $(E \times F)'$ in kanonischer Weise mit $E' \times F'$ identifiziert werden mittels der Abbildung*

$$J : (E \times F)' \longrightarrow E' \times F', u \mapsto (u_E, u_F)$$

mit $u_E(x) := u(x, 0)$ und $u_F(y) := u(0, y)$. Die Inverse von I ist gegeben ist durch

$$K : E' \times F' \longrightarrow (E \times F)', (\varphi, \psi) \mapsto u_{\varphi,\psi}$$

mit $u_{\varphi,\psi}(x, y) := \varphi(x) + \psi(y)$.

Beweis. Die Aussage ueber die Produkttopologie ist einfach. Ebenso ist einfach zu sehen, dass die Bilder von J und K tatsaechlich in den genannten Raeumen liegen d.h. die noetigen Stetigkeitseigenschaften haben.

Wir zeigen nun, dass J und K zueinander invers sind. Dazu rechnen wir:

$$K \circ J(u)(x, y) = K(u_E, u_F)(x, y) = u_E(x) + u_F(y) = u(x, y).$$

$$(J \circ K)(\varphi, \psi) = (K(\varphi, \psi)_E, K(\varphi, \psi)_F) = (\varphi, \psi),$$

Hier nutzen wir im letzten Schritt

$$K(\varphi, \psi)_E(x) = K(\varphi, \psi)(x, 0) = \varphi(x) + \psi(0) = \varphi(x)$$

und entsprechend

$$K(\varphi, \psi))_F(y) = K(\varphi, \psi)(0, y) = \varphi(0) + \psi(y) = \psi(y).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Wir kommen nun zu Quotienten nach Unterraeumen: Sei E ein Vektorraum und F ein Unterraum von E. Dann definiert man auf E eine Aequivalenzrelation durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in F (\Longleftrightarrow y - x \in F).$$

Die Klasse von $x \in E$ wird durch $[x]$ bezeichnet d.h.

$$[x] = \{y \in E : y \sim x\} = x + F.$$

Der Quotient $E/\sim$ von E nach $\sim$ ist die Menge aller Klassen und wird mit

$$E/F := E/\sim$$

bezeichnet. Die kanonische Projektion ist die Abbildung

$$\pi : E \longrightarrow E/F, x \mapsto [x].$$

Es traegt E/F eine eindeutige Vektorraumstruktur, so dass π linear ist. Diese ist gegeben durch

$$[x] + [y] = [x + y] \text{ und } \lambda[x] = [\lambda x]$$

fuer $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ und π ist linear. (Nachrechnen!). Die Dimension von E/F wird als Codimension von F (in E) bezeichnet

$$codim(F) := dim(E/F).$$

Ist $\mathcal{T}$ eine Topolgie auf E, so induziert π eine Topologie, genannt Quotiententopologie, $\widetilde{\mathcal{T}}$ auf E/U durch

$$V \in \widetilde{\mathcal{T}} :\Longleftrightarrow \pi^1(V) \text{ offen}.$$

(Nachrechnen, dass $\widetilde{\mathcal{T}}$ eine Topolgie ist). Dann ist π stetig und es ist $\widetilde{\mathcal{T}}$ die feinste (i.e. groesste) Topologie bzgl. derer π stetig ist. Ist $\mathcal{T}$ eine Vektorraumtopologie, so ist darueberhinaus π offen, d.h. die Bilder offener Mengen sind offen, denn fuer offenes $U \in E$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F = \cup_{x \in F}(x + U).$$

Damit kann man die Topologie explizit beschrieben wie folgt:

Behauptung: Ist $\mathcal{T}$ eine Vektorraumtopologie, so besteht $\widetilde{\mathcal{T}}$ aus den Mengen der Form $\pi(U)$ mit $U \subset E$ offen.

Bew. Jede der Mengen $\pi(U)$ ist offen, da π offen ist. Umgekehrt gilt aufgrund der Surjektivitaet von π natuerlich $V = \pi(\pi^{-1}(V))$. Da π stetig ist, hat dann jedes offene V die gewuenschte Form.

Ist $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, so sieht man aus der Stetigkeit und Offenheit von π leicht, dass $(E/F, \widetilde{\mathcal{T}})$ ebenfalls ein topologischer Vektorraum ist. (Nachrechnen!) Weiterhin gilt dann, dass F genau dann abgeschlossen ist, wenn jeder Punkt von E/F abgeschlossen ist (Nachrechnen: F abschlossen $\Longleftrightarrow \pi(F) = [0]$ abgeschlossen, wobei genutzt wird, dass π offen ist und $E/F = \pi(E)$ die disjunkte Vereinigung von $\pi(F)$ und $\pi(E \setminus F)$ ist.) Daher werden wir eigentlich immer die Abgeschlossenheit von F fordern.

Fuer weitergehende Untersuchungen erweist sich das Konzept des topologischen Vektorraums als zu allgemein. Der Grund liegt darin, dass im allgemeinen keine stetigen linearen Abbildungen auf topologischen Vektorraeumen gibt:

(Gegen)Beispiel. Es gibt topologische Vektorraeume deren Dualraum nur das Nullfunktional enthaelt. Sei

$$\mathcal{R} := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann intbar}\}$$

und

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty), \|f\|_p := \left(int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

fuer ein $p \in (0,1)$. (Dann erfuellt $\|\cdot\|_p$ nicht die Dreiecksungleichung (Uebung). Trotzdem kann man es nutzen, um eine Topologie zu erzeugen wie folgt. Sei fuer $f \in \mathcal{R}$ und $r > 0$

$$B_r(f) := \{g \in \mathcal{R} : \|f - g\|_p \leq r\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathcal{R} : \forall f \in U \exists r > 0 \; s.t. \; B_r(f) \subset U\}$$

eine Vektorraumtopologie auf $\mathcal{R}$ (Nachrechnen. Nutze, dass $\|f + g\|_p \leq 2^p \|f\|_p + \|g\|_p$).

Ende der Vorlesung

Sei $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\varphi \neq 0$. Zu zeigen: φ ist nicht stetig.
Wegen $\varphi \neq 0$ existiert ein $f \in \mathcal{R}$ mit $\varphi(f) = 1$. Fuer $s \in [0,1]$ seien $f_s^{(1)}$ und $f_s^{(2)}$ definiert durch

$$f_s^{(1)}(x) := f(x) \; 0 \leq x \leq s, \;\; 0 \;\; sonst$$

und

$$f_s^{(2)}(x) := f(x) \; s \leq x \leq 1 \;\; 0 \;\; sonst.$$

Dann gilt also $f_s^{(2)} + f_s^{(1)} = f$. (Zeichnung). Wenn s von 0 nach 1 laeuft, laeuft $\|f_s^{(1)}\|_p^p$ stetig (!) von 0 nach $\|f\|_p^p$. Daher existiert also ein $t \in [0,1]$ mit

$$\|f_t^{(1)}\|_p^p = \|f_t^{(2)}\|_p^p = \frac{1}{2}\|f\|_p^p.$$

Wegen

$$1 = \varphi(f) = \varphi(f_t^{(1)} + f_t^{(2)}) = \varphi(f_t^{(1)}) + \varphi(f_t^{(2)})$$

gilt dann also

$$\|\varphi(f_t^{(1)})| \geq 1/2 \;\text{ oder }\; \|\varphi(f_t^{(2)})| \geq 1/2.$$

Ohne Einschraenkung $\|\varphi(f_t^{(1)})| \geq 1/2$. Setze $f_1 := 2f_t^{(1)}$. Dann gilt also

$$|\varphi(f_1)| \geq 1 \;\text{ sowie }\; \|f_1\|_p^p = 2^p \|f_t^{(1)}\|_p^p = 2^{p-1}\|f\|_p^p.$$

Iteration (mit f_j statt f) liefert Folge (f_n) mit

$$|\varphi(f_n)| \geq 1 \;\text{ sowie }\; \|f_n\|_p^p = 2^{n(p-1)}\|f\|_p^p.$$

Wegen $2^{n(p-1)} \to 0$, $n \to \infty$, folgt $f_n \to 0$ bzgl. $\mathcal{T}$. Da aber gilt $|\varphi(f_n)| \geq 1$ fuer alle n ist φ nicht stetig.

Bemerkung zum weiteren Vorgehen. Das vorangehende Beispiel macht auf ein Problem aufmerksam: Im allgemeinen gibt es keine stetigen Abbildungen auf topologischen Vektorraeumen. In diesem Sinne ist das Konzept des topologischen Vektorraums zu allgemein. Es erweist sich, dass das Problem verschwindet, wenn es genuegend viele konvexe Nullumgebungen gibt. Diese Nullumgebungen korrespondieren zu Halbnormen. Entsprechend besteht die uebliche **Loesung** dieses Problems darin, topologische Vektorraeume zu betrachten, deren Topologie durch (Halb)normen erzeugt werden. Solche Topologien heissen lokalkonvexe Vektorraumtopologien und erlauben 'viele' Funktionale. Gleichzeitig erweisen sich (fast) alle in 'konkreten' Situationen auftretenden Topologien als lokalkonvex. In dieser Vorlesung werden wir uns noch staerker einschraenken und nur solche Topologien betrachten, die durch eine einzige Norm erzeugt werden. Die entsprechenden Vektorraeume heissen normierte Raeume. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung normierter Raeumen (und allgemeiner lokalkonvexer Raeumen) lernen wir im folgenen Abschnitt kennen.

KAPITEL 4

Der Satz von Hahn / Banach

Der Satz von Hahn-Banach liefert die Existenz 'vieler' schoener Funktionale. Genauer besagt er die Fortsetzbarkeit von Funktionalen auf Teilraeumen auf den gesamten Raum unter Erhalt einer Abschaetzung. Diese Abschaetzung kann (unter anderem) dazu verwendet werden die Stetigkeit der entsprechenden Funktionale zu garantieren.
Der Beweis des Satzes von Hahn-Banach hat zwei Bestandteile. Der eine Bestandteile liefert eine echte Fortsetzbarkeit eines noch nicht auf dem gesamten Raum definieren Funktionals. Dies ist ein konstruktiver Beweis. Der andere Bestandteil besagt die Existenz einer maximalen Fortsetzung. Dabei wird das sogenannte Zornsche Lemma benutzt. Zusammengenommen liefern beide Bestandteile die Aussage.

1. Das Lemma von Zorn

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Lemma von Zorn. Es liefert die Existenz maximaler Element in halbgeordneten Mengen (unter geeigneten Vorausetzungen).

Eine Menge M heisst halbgeordnet bzgl. einer Ordnungsrelation $\prec$, wenn gilt

(01) $a \prec a$ fuer alle $a \in M$
(02) $a \prec b$, $b \prec c$ impliziert $a \prec c$.
(03) $a \prec b$, $b \prec a$ impliziert $a = b$.

Nicht fuer jedes Paar (a, b) muss eine der Relationen $a \prec b$ oder $b \prec a$ gelten! Eine Teilmenge N von M heisst total geordnet, wenn fuer jedes Paar $(a, b) \in N \times N$ eine der Beziehungen $a \prec b$ oder $b \prec a$ gilt.
Ein Element $s \in M$ heisst obere Schranke einer Teilmenge R von M, wenn fuer jedes $r \in R$ gilt $r \prec s$.
Ein Element $m \in M$ heisst maximales Element in M, wenn aus $m \prec a$ fuer ein $a \in M$ folgt $m = a$ (d.h. wenn es kein echt groesseres Element in M gibt).

Beispiel. $\mathbb{R}$ mit $\leq$ oder $\mathbb{R}$ mit $\geq$. In diesem Fall gibt es kein maximales Element. Aber es hat jede beschraenkte abgeschlossene Menge ein maximales Element.

Beispiel. (M, d) metrischer Raum, $x \in M$.

- $K(x) := \{U_r(x) : r > 0\}$ mit $U_r(x) \prec U_s(x)$ falls $s < r$. Totalgeordnet.
- $U :=$ Umgebungen von x mit $U \prec V$ falls $V \subset U$. Nicht totalgeordnet.

In beiden Systemen gibt es (im allgemeinen) kein maximales Element. (Warum?)

Beispiel. Man kann leicht (endliche) halbgeordnete Mengen angeben, in denen kein maximales Element existiert und nicht alle Elemente gegenseitig vergleichbar sind.

LEMMA. *(von Zorn) Besitzt in einer halbgeordneten Menge jede geordnete Teilmenge eine obere Schranke, so existiert (mindestens) ein maximales Element.*

Bemerkung. Das Zornsche Lemma ist aequivalent zum *Auswahlaxiom*: Seien A_i, $i \in I$, nichtleere Mengen. Dann gibt es eine Funktion F auf I mit $F(i) \in A_i$ fuer alle $i \in I$, d.h. $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Das Auswahlaxiom fuehrt zu verblueffenden Konsequenzen (Banach/Tarski). Es ist mit den ueblichen Grundlagen der Mengenlehre / Logik vertraeglich.

2. Der Satz von Hahn / Banach

In diesem Abschnitt geht es darum, Funktionale von Teilraeumen auf den ganzen Raum fortzusetzen unter Erhalt von gewissen Abschaetzungen. Solche Abschaetzungen koennen als Stetigkeitseigenschaften gedacht werden (wie sich spaeter herausstellt).

DEFINITION. *(Sublineare Funktionale und Halbnnormen) Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$. Ein sublineares Funktional p auf E ist eine Abbildung $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *fuer alle* $x \in E$ *und* $\lambda \geq 0$.
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *fuer alle* $x, y \in E$.

Ein sublineares Funktional p mit $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ fuer alle $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ heisst Halbnorm. Eine Halbnorm p mit $p(x) \neq 0$ fuer $x \neq 0$ heisst Norm.

LEMMA. *(Fortsetzungslemma) Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{R}$ und $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sublinear. Sei $z : G \longrightarrow \mathbb{R}$ linear auf dem Unterraum G von E mit $z \leq p$ (d.h. $z(x) \leq p(x)$ fuer $x \in G$). Sei $x_0 \in E \setminus G$. Dann existiert ein lineares Funktional Z auf*

$$Z : H = Lin\{x_0, G\} = \{\lambda x_0 + y : \lambda \in \mathbb{R}, y \in G\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $Z|_G = z$ und $Z \leq p$ auf H.

Beweis. Idee: Ist Z solches Funktional so muss offenbar gelten $Z(\lambda x_0 + y) = \lambda a + z(y)$ mit $a = z(x_0)$. Die Frage ist also, ob man ein solches a finden kann unter Erhalt der Ungleichungen

$$Z(x_0 + y) \leq p(x_0 + y) \text{ also } a \leq p(x_0 + y) - z(y)$$

und

$$Z(-x_0 + y) \leq p(-x_0 + y) \text{ also } a \geq -p(-x_0 + y) + z(y).$$

(Da alle auftretenden Funktionen mit Multiplikation mit einem $\lambda \geq 0$ vertaeglich sind, reicht es diese beiden Ungleichungen zu erhalten (s.u.).)

Wir bestimmen nun ein geeignetes a:

Fuer alle $x, y \in G$ gilt

$$z(x) + z(y) = z(x+y) \leq p(x + x_0 + (y - x_0)) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Also folgt

$$z(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - z(x)$$

fuer alle $x, y \in G$. Damit folgt

$$m := \sup_{y \in G}\{z(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{x \in G}\{p(x + x_0) - z(x)\} =: M.$$

Waehle nun $a \in [m, M]$. (Dann gilt also nach Konstruktion

$$-p(-x_0 + y) + z(y) \leq a \leq p(x_0 + y) - z(y)$$

fuer alle $x, y \in G$ und die beiden obigen Ungleichungen sind erfuellt.)

Ende der Vorlesung

Fuer diese Wahl von a definieren wir nun

$$Z(\lambda x_0 + y) = \lambda a + z(y).$$

Dann ist (offenbar) Z linear und eine Fortsetzung von z. Weiterhin erfuellt Z nach Konstruktion die geforderte Ungleichung:

$\lambda > 0$: Nach Konstruktion von a und Definition von M gilt

$$Z(x + \lambda x_0) = z(x) + \lambda a \leq z(x) + \lambda M \leq z(x) + \lambda(p(\frac{1}{\lambda}x + x_0) - z(\frac{1}{\lambda}x)) = p(x + \lambda x_0).$$

$\lambda < 0$: Nach Konstruktion von a und Definition von m gilt

$$Z(x + \lambda x_0) = z(x) + \lambda a \leq z(x) + \lambda m \leq z(x) + \lambda(z(\frac{-1}{\lambda}x) - p(\frac{-1}{\lambda}x - x_0)) = p(x + \lambda x_0).$$

$\lambda = 0$: $Z(x) = z(x) \leq p(x)$.

Damit hat Z die gewuenschten Eigenschaften. □

Theorem. *(Hahn - Banach: reeller Fall) Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{R}$ und p ein sublineares Funktional auf E. Sei F ein Unterraum von E und $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\varphi(x) \leq p(x)$ fuer alle $x \in F$. Dann existiert ein lineares Funktional Φ auf E mit $\Phi|_F = \varphi$ und $\Phi \leq p$.*

Beweis. Sei $\mathcal{Z}$ die Menge der Fortsetzungen von φ, die die Ungleichung erfuellen, d.h. $\mathcal{Z}$ besteht aus den Paaren (G, ψ) mit
G Unterraum von E mit $G \subset E$,
$\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\psi \leq p$
$\psi_F = \varphi$.
Dann ist $\mathcal{Z}$ nicht leer (da $(F, \varphi) \in \mathcal{Z}$). Durch $(G_1, \psi_1) \prec (G_2, \psi_2)$ falls $G_1 \subset G_2$ und $\psi_2|_{G_1} = \psi_1$ wird eine Halbordnung auf $\mathcal{Z}$ definiert. Ist $\mathcal{C}$ eine total geordnete Menge in $\mathcal{Z}$, so ist offenbar (G_m, ψ_m) mit

$$G_m := \cup_{(G,\psi)\in\mathcal{C}} G, \ \psi_m(x) = \psi(x); \text{ fuer } x \in G \text{ mit } (G, \psi) \in \mathcal{C}$$

eine obere Schranke von $\mathcal{C}$. Daher gibt es nach dem Lemma von Zorn also ein maximales Element (G, ψ) in $\mathcal{Z}$. Dann muss aber nach dem vorigen Lemma gelten $G = E$. (Sonst gaebe es $x_0 \in E \setminus G$ und wir koennten, nach dem vorigen Lemma, ψ noch auf $Lin\{x_0, G\}$ fortsetzen. Widerspruch). □

Bemerkung. Der Beweis hat zwei Schritte: (1) Es gibt eine maximale Fortsetzung (Zorn). (2) Diese Maximale Fortsetzung ist ueberall definiert (Lemma).

THEOREM. *(Hahn-Banach: Halbnorm) Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$, p eine Halbnorm auf E. Sei F ein Unterraum von E und $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linear mit $|\varphi| \leq p$. Dann existiert ein lineares $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\Phi|_F = \varphi$ und $|\Phi| \leq p$.*

Beweis. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt $\varphi \leq p$ (denn $\varphi \leq |\varphi| \leq p$). Daher existiert nach dem vorigen Satz eine Fortsetzung $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\Phi \leq p$. Dann gilt also auch $-\Phi(x) = \Phi(-x) \leq p(-x) = p(x)$ und $|\Phi| \leq p$ folgt.

$K = \mathbb{C}$. Wir beginnen mit einer Vorueberlegung zum 'Komplexifizieren' von reellen Funktionalen.

- Ist $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linear (ueber $\mathbb{C}$), so ist $u := \Re\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear ueber $\mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = u(x) - iu(ix)$. (Kleine Rechnung: $\Im\varphi(x) = -\Re\varphi(ix)$...)
- Ist $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear (ueber $\mathbb{R}$), so ist $\varphi(x) := u(x) - iu(ix)$ linear ueber $\mathbb{C}$ mit $\Re\varphi = u$. (Kleine Rechnung: Offenbar linear ueber $\mathbb{R}$; reicht zu zeigen $\varphi(ix) = i\varphi(x)$; Einsetzen...)

Damit bestimmt also der Realteil des Funktionals schon das Funktional. Entsprechend reicht es, den Realteil fortzusetzen und wir koennen damit den komplexen Fall wie folgt auf den reelen Fall zurueckfuehren:
Betrachte $u := \Re\varphi$. Dann gilt $|u| \leq p$ und u ist linear ueber $\mathbb{R}$. Damit folgt aus dem schon untersuchten reellen Fall, dass ein lineares (ueber $\mathbb{R}$) $U : E \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $|U| \leq p$ und $U|_F = u$. Dann ist nach der Vorueberlegung

$$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{C},\ \Phi(x) = U(x) - iU(ix)$$

linear ueber $\mathbb{C}$ und eine Fortsetzung von φ auf E. Es bleibt die Ungleichung $|\Phi| \leq p$ zu zeigen: Es gilt mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)| &= e^{i\alpha}\Phi(x) \\ &= \Phi(e^{i\alpha}x) \\ (reell) \quad &= \Re\Phi(e^{i\alpha}x) \\ (Definition\ U) \quad &= U(e^{i\alpha}x) \\ &\leq p(e^{i\alpha}x) \\ (p\ Halbnorm) \quad &= p(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. *Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$ und p eine Halbnorm auf E und $x_0 \in E$ beliebig. Dann gibt es ein lineares $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\varphi(x_0) = p(x_0)$ und $|\varphi| \leq p$*

Beweis. Sei $F := Lin\{x_0\}$ und $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$. Dann gilt $|\varphi| \leq p$ auf F und die Aussage folgt aus dem Satz von Hahn Banach fuer Halbnormen. □

KAPITEL 5

Normierte Räume

In diesem Abschnitt lernen wir die fuer diese Vorlesung wichtigste Klasse von topologischen Vektorraeumen kennen.

1. Normen

Wir beginnen, in dem wir das zentrale Konzept zur 'Laengenmessung' in einem Vektorraum noch noch einmal vorstellen.

DEFINITION. *Sei E ein Vektorraum ueber $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow [0,\infty)$$

heisst Norm auf E, wenn fuer alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(N1) $\|x\| = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$,
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dann heisst $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Bemerkung. Eine Abbildung, die $(N2)$ und $(N3)$ erfuellt, heisst Halbnorm.

Beispiele.

- $\mathbb{K}^n$ mit der Euklidischen Norm

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

- $C([0,1])$ mit der Supremumnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
- Weitere Beispiele spaeter.

PROPOSITION. *Sei E ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann induziert $\|\cdot\|$ eine Metrik auf E mittels*

$$d = d_{\|\cdot\|} : E \times E \longrightarrow [0,\infty),\ d(x,y) = \|x - y\|.$$

Mit der von dieser Metrik kommenden Topologie $\mathcal{T}$ wird $(E, \|\cdot\|)$ zu einem topologischen Vektorraum. Diese Topologie ist hausdorffsch. Es gilt

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in E : \|y - x\| < \varepsilon\},\ \ B_\varepsilon(x) = \{y \in E : \|y - x\| \leq \varepsilon\}.$$

Beweis. d ist Metrik. Einfach.

Ausagen uber U_ε, B_ε. Klar.

Topologie ist Vektorraumtopologie. Wir muessen Stetigkeit der Addition A und der Multiplikation M zeigen.

Zu A: Sei V eine Umgebung von $x+y$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x+y) \subset V$. Dann ist $U_{\varepsilon/2}(x)$ Umgebung von x und $U_{\varepsilon/2}(y)$ Umgebung von y mit (Dreiecksungleichung)

$$A(U_{\varepsilon/2}(x) \times U_{\varepsilon/2}(y)) \subset U_\varepsilon(x+y) \subset V.$$

(Denn: $\|v+w-(x+y)\| \leq \|v-x\| + \|w-y\|$...) Da $U_{\varepsilon/2}(x) \times U_{\varepsilon/2}(y)$ eine Umgebung von (x,y) ist, folgt die gewuenschte Stetigkeit.

Zu M: Fuer alle $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mu y - \lambda x\| &\leq \|\mu y - \mu x\| + \|\mu x - \lambda x\| \\ &= |\mu| \|y - x\| + |\mu - \lambda| \|x\|. \end{aligned}$$

Damit folgt die Stetigkeit von M leicht.

Topologie ist Hausdorffsch. Klar, da von Metrik erzeugt. □

Bemerkung.

- Normen erzeugen Vektorraumtopologie, da sie besonders gut mit linearen Operationen vertraeglich sind.
- Die Nichtausgeartetheit spielt bei der Definition der Topologie keine Rolle. Die enstprechenden Aussagen gelten also auch fuer Halbnormen.
- Die Nichtausgeartetheit ist wesentlich fuer die Hausdorffeigenschaft.

Notation. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ falls $x_n \to x$ bzgl d.
(x_n) Cauchy Folge bzgl. $\|\dot{}\|$ falls (x_n) Cauchy-Folge bzgl. d.
$(E, \|\cdot\|)$ vollstaendig, wenn (E, d) vollstaendig ist.

Proposition. *(Variante Dreiecksungleichung) Sei $(E, \|\cdot\|)$ eine normierter Raum. Dann gilt*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

fuer alle $x, y \in E$. Insbesondere ist $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, \infty)$ stetig.

Beweis. Es gilt

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

also

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

und analog (nach Vertauschen von x und y)

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Damit folgt

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Stetigkeit von $\|\cdot\|$. Fuer $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nach dem bisher bewiesenen

$$\|y\| \in U_\varepsilon(\|x\|).$$

□

Wir diskutieren nun kurz wie man Topologien vergleichen kann die von verschiedenen Normen kommen.

LEMMA. *Sei E ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf E. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es erzeugt $\|\cdot\|_1$ eine feinere Topologie als $\|\cdot\|_2$.*
(ii) *Es existiert ein $C > 0$ mit $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ fuer alle $x \in E$.*
(iii) *Aus $x_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ folgt $x_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.*

Beweis. Es ist (i) equivalent dazu dass die

$$Id : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

stetig ist (s.o.) Aufgrund der Linearitaet von Id ist diese Stetigkeit aequivalent zur Stetigkeit von Id in 0. Es sind (ii) und (iii) gerade zwei verschieden Fassungen der Stetigkeit in 0. (Vgl. auch kommenden Abschnitt). □

DEFINITION. *Ein vollstaendiger normierter Vektorraum heisst Banachraum.*

(Evtl. noch etwas zu Produkten.)

Wir diskutieren nun kurz, wie die Bildung von Quotienten mit der Norm vertraeglich ist:
Ist F abgeschlossen und die Vektorraum Topologie $\mathcal{T}$ durch eine Norm $\|\cdot\|$ erzeugt, so laesst sich auch eine Norm auf E/F einfuehren. Man definiert fuer $t = [x]$

$$|||t||| := \inf\{\|y\| : y \in t\} = \inf\{\|x + f\| : f \in F\}.$$

THEOREM. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und F ein abgeschlossener Unterraum von E. Dann wird durch*

$$|||\cdot||| : E/F \longrightarrow [0, \infty), [x] \mapsto \inf\{\|y\| : y \in x + F\}$$

eine Norm auf E/F eingefuehrt. Die durch $|||\cdot|||$ induzierte Topologie ist gerade die Quotiententopologie. Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollstaendig, so ist auch $(E/F, |||\cdot|||)$ vollstaendig.

Beweis. Es ist nicht so schwer zu zeigen, dass $|||\cdot|||$ eine Norm ist (Uebung).
Aussage zur Quotiententopologie: Die Definition von $|||\cdot|||$ zeigt

$$U_\delta([x]) = \pi(U_\delta(x)).$$

Da die Topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ gerade aus den Mengen der Form $\pi(U)$ mit $U \subset E$ offen, besteht, folgt die Behauptung.
Vollstaendigkeit: Sei (t_n) eine Cauchy Folge in E/F. Ohne Einschraenkung (sonst Teilfolge) koennen wir annehmen, dass

$$|||t_n - t_m||| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

fuer alle $m \geq n$. Daher koennen wir induktiv $x_n \in E$ mit $\pi(x_n) = t_n$ konstruieren mit

$$\|x_n - x_{n+1}\| < \frac{1}{2^n} :$$

$n = 1$: Waehle x_1 mit $\pi(x_1)$ beliebig.
$n \Longrightarrow (n+1)$: Seien $x_1, \ldots, x_n$ wie gewuenscht schon konstruiert. Wegen

$$|||\pi(x_n) - t_{n+1}||| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

und der Definition von $|||\cdot|||$ gibt es also ein x_{n+1} mit

$$\|x_n - x_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Die (x_n) sind dann offenbar eine Cauchy Folge in E (Dreiecksungleichung). Daher konvergiert (x_n) gegen ein $x \in E$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von π

$$t_n = \pi(x_n) \to \pi(x) =: t.$$

Das liefert die gewuenschte Vollstaendigkeit. □

2. Stetige Abbildungen zwischen normierten Raeumen

Theorem. *(Charakterisierung Stetigkeit von linearen Abbildungen zwischen normierten Raeumen) Seien* $(E, \|\cdot\|_E)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *normierte Raeume und* $T : E \longrightarrow F$ *linear. Dann sind aequivalent:*

(i) T *ist stetig.*
(ii T *ist stetig bei* 0.
(iii) *Es existiert ein* $C > 0$ *mit* $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ *fuer alle* $x \in E$.
(iv) *Es gilt* $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F < \infty$.

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$ (ii): Das gilt fuer allgemeine topologische Vektorraeume. (Direkter Beweis ist gute Uebung).

(i)$\Longrightarrow$ (iv): Da T stetig ist (also auch stetig in 0) gibt es ein $\delta > 0$ mit $TB_\delta^E(0) \subset B_1^F(0)$. Dann gilt also

$$\sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq \delta\} \leq 1.$$

Damit folgt (nach Skalieren mit $1/\delta$)

$$\sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Das ist gerade (iv).

(iv)$\Longrightarrow$ (iii): Sei $C := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F < \infty$. Dann gilt fuer jedes $x \neq 0$

$$\|Tx\|_F = \|x\|_E \|T\frac{1}{\|x\|_E} x\|_F \leq \|x\|_E C.$$

(iii)$\Longrightarrow$ (ii): Nach (iii) gilt $TU_{\varepsilon/C}^E(0) \subset U_\varepsilon^F(0)$. Das ist gerade die Stetigkeit in 0. □

Bemerkung. Die Stetigkeit von T bedeutet gerade, dass die durch die Halbnormen $x \mapsto \|Tx\|$ induzierte Topologie groeber als die Ursprungstopologie ist.

Ende der Vorlesung

Proposition. *(Norm auf dem Raum der linearen Abbildungen) Seien* $(E, \|\cdot\|_E)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *normierte Raeume. Dann definiert*

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \min\{C > 0 : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \;\; \text{alle } x \in E\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} \end{aligned}$$

eine Norm auf dem Raum $L(E, F)$ *der stetigen Abbildungen zwischen* E *und* F. *Es gilt*

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

fuer alle $x \in E$ und $T \in L(E, F)$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst Gleichheit von

$$I := \inf\{C > 0 : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \text{ alle } x \in E\}$$

und

$$S := \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}.$$

$I \leq S$: Nach Definition von S gilt fuer $x \neq 0$

$$\|Tx\|_F = \|x\|_E \|T\frac{1}{\|x\|_E} x\|_F \leq S\|x\|_E.$$

Damit folgt $I \leq S$.

$S \leq I$: Sei $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ fuer alle $x \in E$. Dann gilt also insbesondere

$$\|Tx\|_F \leq C$$

fuer alle $\|x\|_E \leq 1$. Damit folgt $S \leq C$ und somit $S \leq I$.

Es ist $\|\cdot\|$ eine Norm. Das ist einfach.

Es gilt die Ungleichung $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Im Beweis von $I \leq S$ wurde das gezeigt fuer $x \neq 0$. Offenbar gilt es auch fuer $x = 0$. Die Gueltigkeit dieser Ungleichung zeigt auch, dass man das Infimum in der Definition von I durch ein Minimum ersetzen kann. □

Theorem. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Raeume. Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ vollstaendig. So ist $(L(E, F), \|\cdot\|)$ vollstaendig.*

Beweis. Sei (T_n) eine Cauchy Folge, d.h. fuer alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Dann ist $(T_n x)$ eine Cauchy Folge fuer jedes $x \in E$. Da F vollstaendig ist, existiert

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

fuer jedes $x \in E$.

T ist linear. $T(x + \lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + \lambda y) = ...$

T ist stetig. Sei $N = N_1$. Da $\|\cdot\|$ stetig ist, gilt dann

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \limsup_{n\to\infty}(\|T_n x - T_N x\| + \|T_N x\|) \leq (1 + \|T_N\|)\|x\|.$$

T_n konvergiert gegen T. Fuer $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{k\to\infty} \|(T_k - T_n)x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

fuer alle $x \in E$. □

Bemerkung. Es handelt sich um einen typischen Vollstaendigkeitsbeweis: Schritt 1: Kandidat fuer Grenzwert verschaffen. Schritt 2: Zeigen, dass Kandidate im Raum liegt. Schritt 3: Zeigen der Konvergenz gegen Kandidaten.

3. Dualraeume normierter Raeume

In diesem Abschnitt lernen wir grundlegende Eigenschaften der Dualraeume normierter Raeume kennen. Es zeigt sich, dass diese Raeume immer vollstaendig sind und genuegend viele Funktionale enthalten, um die (nicht nur) die Punkte des Raumes von einander zu trennen. Die Aussagen dieses Abschnittes sind Folgerungen aus dem schon diskutierten.

THEOREM. *Ist* $(E, \|\cdot\|)$ *normierter Raum, so ist der Dualraum* $(E', \|\cdot\|)$ *mit*

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

ein vollstaendiger normierter Raum.

Beweis. Es ist $E' = L(E, \mathbb{K})$ und die Aussage folgt aus dem vorigen Satz. □

THEOREM. *(Hahn-Banach fuer normierte Raeume) Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum ueber* $\mathbb{K}$*. Ist* U *ein Unterraum von* E *und* $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{K}$ *ein stetiges Funktional auf* U *(mit* $|\Psi| \leq C\|\cdot\|$ *fuer ein* $C \geq 0$*), so laesst sich* Ψ *zu einem stetigen Funktional* ψ *auf* E *fortsetzen (mit* $|\psi| \leq C\|\cdot\|$*).*

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Hahn-Banach. □

Damit kommen nun zu entscheidenden Konsequenzen des Satzes von Hahn-Banach fuer normierte Raeume: Auf normierten Raeumen gibt es viele Funktionale; genauer gesagt, genuegend viele, um die Punkte (und mehr) voneinander zu trennen.

FOLGERUNG. *(Hahn-Banach Konsequenz: Ausrechnen der Norm) Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum ueber* $\mathbb{K}$ *und* $x \in E$*. Dann existiert ein stetiges* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ *mit* $\varphi(x) = \|x\|$ *und* $\|\varphi\| \leq 1$*. Insbesondere gilt*

$$\|z\| = \max\{|\varphi(z)| : \varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$$

fuer alle $z \in E$*.*

Beweis. Zur ersten Aussage: Sei U der von x aufgespannte Unterraum und

$$\Phi : U \longrightarrow \mathbb{K},\ \alpha x \mapsto \alpha\|x\|.$$

Dann gilt offenbar $|\Phi| \leq \|\cdot\|$. Nach dem vorangehenden Satz von Hahn-Banach fuer normierte Raeume existiert dann eine Fortsetzung φ von Φ mit $\|\varphi\| \leq 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.
Zum 'Insbesondere': Offenbar gilt

$$\sup\{|\varphi(z)| : \varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|z\|.$$

Mit der ersten schon bewiesenen Aussage folgt dann die gewuenschte Gleichheit. □

FOLGERUNG. *(Hahn-Banach Konsequenz: Trennung der Punkte) Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum ueber* $\mathbb{K}$ *und* $x \in E$*. Dann trennt* $E^{'}$ *die Punkte von* E *(d.h. zu* $x, y \in E$ *mit* $x \neq y$ *existiert ein* $\varphi \in E^{'}$ *mit* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$*).*

Beweis. Anwenden der vorangehenden Folgerung auf $z = x - y \neq 0$ liefert ein $\varphi \in E'$ mit $0 \neq \varphi(z) = \varphi(x) - \varphi(y)$. □

FOLGERUNG. *Sei $T : E \longrightarrow F$ eine stetige Abbildung zwischen normierten Raeumen. Dann gilt*

$$\|T\| := \sup\{|(\varphi, Tx)| : \varphi \in E^{'} \text{ mit } \|\varphi\| \leq 1,\ x \in E, \text{ mit } \|x\| \leq 1\}.$$

Beweis. Das folgt leicht durch Anwenden der obigen Folgerung zum Ausrechnen der Norm. □

Fuer 'spaeter' halten wir auch noch folgende Anwendung des Satz von Hahn-Banach fest:

FOLGERUNG. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Unterraum und $x \notin U$. Dann existiert ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) = 1$ und $\varphi = 0$ auf U.*

Beweis. Wir betrachten das Funktional $\psi : Lin(x, U) \longrightarrow \mathbb{K}, \alpha x + u \mapsto \alpha$. Dann ist der Kern von ψ (d.h. U) abgeschlossen und damit ist ψ stetig. Nun laesst sich Hahn Banach anwenden. □

Interpretation. In den genannten Folgerungen geht es darum, geeignete konvexen Mengen durch stetige Funktionale zu trennen (d.h. zu disjunkten konvexen Mengen C_1 und C_2 ein stetiges Funktional φ zu finden, so dass φ auf C_1 (strikt) positiv ist und auf C_2 (strikt) negativ). Die durch den Kern des Funktionals gegebene abgeschlossene Hyperebene trennt dann die konvexen Mengen voneinander.

Ende der Vorlesung

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Abbildung

$$J : X \longrightarrow (X')', J(x)(\varphi) := \varphi(x),$$

isometrisch. (Denn:

$$\|J(x)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |J(x)(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| = \|x\|.$$

(Hahn-Banach) im letzten Schritt.) Ist j surjektiv, so heisst X reflexiv. Offenbar ist jeder reflexive normierte Raum vollstaendig (Dualraum ist Banachraum). Offenbar ist jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv. (Denn: Dualraum hat selbe Dimension wie Ursprungsraum...).

KAPITEL 6

Beispiele normierter Räume und ihrer Dualraeume

In diesem Abschnitt lernen wir einige wichtige Beispiele normierter Raeume kennen.

1. Die $\|\cdot\|_\infty$ Norm und Dualraeume von c_c und c_0

Ist X eine nichtleere Menge, so definiert man den Raum der beschraenkten Funktionen (mit Werten im Koerper $\mathbb{K}$) als

$$B(X) := B_{\mathbb{K}}(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty\}.$$

Proposition. *Sei X eine nichtleere Menge. Dann wird durch*

$$\|\cdot\|_\infty : B(X) \longrightarrow [0,\infty),\ \|f\|_\infty := \sup|f(x)|$$

eine Norm auf $B(X)$ definiert und $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollstaendig.

Beweis. Es ist nicht schwer, zu sehen, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist. Nun zur Vollstaendigkeit:
Sei (f_n) eine Cauchy Folge in $B(X)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N_\varepsilon$ und $x \in X$.
Dann ist $(f_n(x))$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{K}$ fuer jedes $x \in X$. Da $\mathbb{K}$ vollstaendig ist, existiert dann also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

fuer alle $x \in X$ und es gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $x \in x$ und $n \geq N_\varepsilon$. Damit folgt

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit folgt $f \in B(X)$ und $f_n \to f$. □

Bemerkung. Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein vollstaendiger normierter Raum, so lassen sich analoge Betrachtunge fuer

$$B(X)_F = \{f : X \longrightarrow F : \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty\}$$

mit

$$\|f\|_\infty := \sup|f(x)|$$

durchfuehren.

Wir betrachten nun einige Anwendungen des vorigen Ergebnis.
Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$$

und

$$C_b(X) := C(X) \cap B(X).$$

THEOREM. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $C_b(X)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ vollstaendig.*

Beweis. Es geht im wesentlichen darum, dass der gleichmasessige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist. Genauer: Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $C_b(X)$. Dann ist (f_n) eine Cauchy Folge in $B(X)$. Daher konvergiert (f_n) gegen $f \in B(X)$. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Das folgt mit einem $\varepsilon/3$ Argument: Sei N mit $\|f_N - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ gewaehlt. Sei zu $z \in X$ eine Umgebung U von z gewaehlt mit $|f_N(x) - f_N(z)| \leq \varepsilon/3$ fuer $x \in U$. Dann gilt

$$|f(x) - f(z)| \leq \|f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $x \in U$. Damit folgt die Stetigkeit von f in z. $\square$

Weiterhin definieren wir fuer einen topologischen Raum X noch

$$C_0(X) := \{f \in C_b(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists K \subset X \text{kompakt} : |f(x)| \leq \varepsilon \text{ fuer } x \notin K\}$$

und

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \exists \text{kompakt } K \subset X \;\; f(x) = 0 \text{fuer } x \notin K\}.$$

(Beginn Kleiner Exkurs- Kompaktheit: Definition Ueberdeckungskompaktheit fuer Teilmengen topologischer Raeume, Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt, stetige reellwertige Funktionen auf Kompakte sind beschraenkt, nehmen Minima und Maxima an, Definition total beschraenkter Teilmengen metrischer Raeume, Charakterisierung total beschraenkt via Cauchy-Teilfolgen, Charakterisierung Kompaktheit in metrischen Raeumen, Diskussion Kompaktheit im Euklidischen Raum...)

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $C_0(X)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein vollstaendiger normierter Raum.*

Beweis. Offenbar gilt $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X)$. Insbesondere konvergiert also jede Cauchy Folge aus $C_0(X)$ in $C_b(X)$.

Es ist $C_0(X)$ vollstaendig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Sei (f_n) eine Cauchy Folge in $C_0(X)$. Dann konvergiert f_n gegen ein $f \in C_b(X)$ nach der vorangegangenen Folgerung. Zu zeigen $f \in C_0(X)$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein N mit $\|f - f_N| \leq \varepsilon/2$ aufgrund der Konvergenz. Weiterhin existiert wegen $f_N \in C_0(X)$ ein Kompaktum K mit $|f_N(x)| \leq \varepsilon/2$ fuer $x \notin K$. Damit gilt fuer $x \notin K$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

FOLGERUNG. *Ist (X, d) ein metrischer Raum und jede Kugel $B_r(x)$, $x \in X$, $r > 0$ kompakt, so ist $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$. Insbesondere sind dann aequivalent:*

(i) *Es ist X kompakt.*
(ii) *Es ist $C_c(X)$ vollstaendig.*

(iii) *Es gilt* $C_c(X) = C_0(X)$.

Bemerkung.

- Die Folgerung gilt insbesondere fuer $\mathbb{R}^d$ mit der ueblichen Euklidischen Metrik.
- Die Voraussetzung der Kompaktheit der Kugeln kann wesentlich abgeschwaecht werden: Es reicht, dass jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Entsprechende topologische Raeume heissen *lokalkompakt.*

Beweis.

Zur Dichtheit von $C_c(X)$ *in* $C_0(X)$. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $B_R := B_R(x_0)$. Sei

$$\varphi_R(x) := \max\{0, 1 - d(B_R, x)\}.$$

Dann ist φ_R eine stetige Funktion mit Traeger in dem (nach Voraussetzung) kompakten B_{R+1}. Es gilt fuer jedes $f \in C_0(X)$

$$\|\varphi_R f - f\|_\infty = \sup\{\|(\varphi_R(x) - 1) f(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \notin B_R\} \to 0.$$

(Hier wird im letzten Schritt genutzt, dass f zu $C_0(X)$ gehoert und jedes Kompaktum in einer Kugel B_R fuer genuegend grosses R enthalten ist.)

Zur Aequivalenz: Aus (i) folgt $C_c(X) = C_b(X)$ und damit folgt aus dem schon bekannten auch (ii). Da $C_c(X)$ dicht im vollstaendigen $C_0(X)$ ist, folgt aus (ii), sofort (iii). Es bleibt (iii)$\Longrightarrow$ (i) zu zeigen. Waehle $p \in X$ beliebig und betrachte

$$f(x) = \frac{1}{1 + d(p, x)}.$$

Danit gehoert f offenbar zu $C_0(X)$ (wegen $|f(x)| \leq \varepsilon$ fuer $x \notin B_{1/\varepsilon}(p)$). Damit hat f nach (iii) also kompakten Traeger. Da f nirgends verschwindet, ist dann X kompakt. $\square$

Wir fuehren jetzt noch einige Raeume von Funktionen auf der Menge $X = \mathbb{N}$ ein.

Definition. *Es sei*

$$c = C(\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}\} \quad \textit{'Folgen'},$$

$$c_b := \ell^\infty := B(\mathbb{N}), \quad \textit{'beschraenkte Folgen'},$$

$$c_0 := C_0(\mathbb{N}) = \{x \in \ell^\infty : \lim_{k\to\infty} x(k) = 0\}, \quad \textit{'Nullfolgen'}$$

$$c_c := C_c(\mathbb{N}) = \{x \in \ell^\infty : x(k) = 0 \textit{ fuer alle bis auf endlich viele } x\}$$

jeweils ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$.

Offenbar ist $\mathbb{N}$ (mit der Euklidischen Metrik) ein metrischer Raum, in dem jede Kugel kompakt ist. Daher sind also nach dem schon diskutierten, ℓ^∞ und c_0 vollstaendig und c_c ist nicht vollstaendig (da offenbar $c_c \neq c_0$). Wir kommen nun zu den Dualraeumen von c_0, c_c, c. Dazu fuehren wir noch einen weiteren Raum ein: Es sei

$$\ell^1 := \{x \in c_b : \sum_k |x(k)| < \infty\}$$

mit der Norm (!)

$$\|x\|_1 := \sum_k |x(k)|.$$

THEOREM. *($c_0' = \ell^1$) Die Abbildung $j : \ell^1 \longrightarrow c_0', j(b)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k)x(k)$ ist ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. Es gehoert $j(b)$ zu c_0': Es gilt offenbar fuer jedes $b \in \ell^1$ und $x \in c_0$

$$|\sum_k b(k)x(k)| \leq \sum_k |b(k)||x(k)| \leq \|x\|_\infty \sum_k |b(k)| = \|x\|_\infty \|b\|_1.$$

Daher gilt $j(b) \in c_0'$ sowie $\|j(b)\| \leq \|b$
$|_1$.
j ist linear. Das ist klar.
j ist isometrisch. Die Ungleichung $\|j(b)| \leq \|b\|_1$ wurde schon gezeigt.
$\|b\|_1 \leq \|j(b)\|$: Idee: Testen mit $x = \mathrm{sgn}(b)$. Problem $\mathrm{sgn}(b)$ gehoert nicht zu c_0. Loesung Abschneiden. Hier sind die Details:
Sei fuer $N \in \mathbb{N}$ $x_N := \mathrm{sgn}(b)1_{[1,N]}$. Dann gilt $x_N \in c_c \subset c_0$, $\|x_N\|_\infty \leq 1$ und

$$|j(b)(x_N)| = |\sum_{k=1}^{N} b(k)\mathrm{sgn} b(k)| = \sum_{k=1}^{N} |b(k)| \to \|b\|_1,\ N \to \infty.$$

j ist injektiv. Klar, da isomtrisch.
j ist surjektiv. Sei $\varphi \in c_0'$. Zu zeigen: $\varphi = j(b)$ fuer ein $b \in \ell^1$. Wir setzen $b_n := \varphi(\delta_n)$ mit $\delta_n(k) = \delta_{n,k}$. (Falls φ ueberhaupt von einem b kommt, dann muss es dieses b sein.) Dann gilt fuer alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} |b(k)| = \varphi(\sum_{k=1}^{N} \mathrm{sgn} b(k)\delta_k) \leq \|\varphi\|\|x_N\|_\infty \leq \|\varphi\|.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt $b \in \ell^1$.

Ende der Vorlesung.

Weiterhin gilt fuer $x \in c_0$ offenbar

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x(k)\delta_k.$$

(Hier wird natuerlich der Grenzwert in der $\|\cdot\|_\infty$ genommen.) Damit folgt

$$\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x(n)b(n) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)b(k) = j(b)(x).$$

□

Bemerkung.

- Mit demselben Beweis sieht man auch $c_c' = \ell^1$. (Denn der Beweis nutzt an entsprechenden Stellen immer nur Approximationen durch Elmente aus c_c.) Tatsaechlich gilt immer $\widetilde{X}' = X'$, wenn $\widetilde{X}$ ein dichter Unterraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ ist.
- Als Nebenprodukt erhaelt man, dass ℓ^1 vollstaendig ist (als Dualraum).

THEOREM. *Sei c_{konv} der Vektorraum der konvergenten Folgen auf $\mathbb{N}$ ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt*

$$c'_{konv} = \{\varphi_b + \alpha\psi_\infty : b \in \ell^1, \alpha \in \mathbb{K}\},$$

mit

$$\psi_\infty : c \longrightarrow \mathbb{K}, \psi_\infty(x) := \lim_{k\to\infty} x(k)$$

und

$$\varphi_b : c \longrightarrow \mathbb{K}, \varphi_b(x) := \sum_{k=1}^{\infty} b(k)x(k).$$

Beweis. Offenbar gehoert jedes Element der Form $\varphi_b + \alpha\psi_\infty : b \in \ell^1, \alpha \in \mathbb{K}$, zu c'_{konv}. Sei nun umgekehrt $\varphi \in c'_{konv}$ gegeben. Dann gehoert $\varphi|_{c_0}$ zu c'_0 und daher existiert nach dem vorigen Satz ein $b \in \ell^1$ mit $j(b) = \varphi|_{c_0}$. Weiterhin sei $\alpha := \varphi(1)$. Dann stimmt

$$\psi := \varphi_b + (\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} b(n))\psi_\infty$$

auf c_0 und auf $Lin\{1\}$ mit φ ueberein. Da offenbar (!) gilt $c_{konv} = c_0 + Lin\{1\}$ folgt die gewuenschte Aussage. □

2. Die ℓ^p Raeume und ihre Dualraeume

In diesem Abschnitt fuehren wir wichtige Klassen von Folgenraeumen ein. Diese 'verbinden' die schon eingefuehrten Raeume ℓ^1 und ℓ^∞.

DEFINITION. *Fuer $1 \le p < \infty$ sei $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty\}$ und*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p}.$$

Bemerkung. Analog lassen sich $\ell^p(V)$ fuer beliebige Mengen V definieren.

Ziel: Die ℓ^p sind vollstaendige normierte Raeume.

Wir machen uns zunaechst klar, dass die ℓ^p in der Tat Vektorraeume sind: Es gilt

$$|x(k) + \lambda y(k)|^p \le (2\max\{|x(k)|, |\lambda y(k)|\})^p \le 2^p|x(k)|^p + 2^p\lambda^p|y(k)|^p$$

fuer alle $x, y \in \ell^p$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Damit folgt nach Summieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) + \lambda y(k)|^p < \infty.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist. Dazu zunaechst eine (auch in anderen Zusammenhang interessante) Vorbereitung.

LEMMA. *Seinen $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \ge 0$. Dann gilt*

$$0 \le ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis. Ohne Einschraenkung $a, b > 0$ (sonst sowieso klar). Sei $u := a^p$ und $v := b^q$; also $u, v > 0$. Dann gilt aufgrund der Konvexitaet der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} ab &= u^{1/p} v^{1/q} \\ &= e^{\frac{1}{p}\ln u + \frac{1}{q}\ln v} \\ (Konvexitaet\ ) \quad &\leq \frac{1}{p} e^{\ln u} + \frac{1}{1} e^{\ln v} \\ &= \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v. \end{aligned}$$

Das ist gerade die Behauptung. □

Im folgenden werden p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ sowie die Grenzfaelle $q = 1, p = \infty$ und $p = \infty$, $q = 1$, eine grosse Rolle spielen. Daher machen wir uns kurz einige Eigenschaften von solchen p, q klar: Zunaechst sind die Rollen von q und p voellig symmetrisch. In allen folgenden Formeln kann man also p und q vertauschen. Es gilt

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Damit sieht man, dass zu jedem p eine eindeutiges q gehoert und umgekehrt. Das Paar $(2, 2)$ spielt eine besondere Rolle (s.u.). Werte von p zwischen $1 und 2$ entsprechen gerade Werten von q zwischen ∞ und 2.
Weiterhin gelten die folgenden Formeln

$$q(p-1) = p \quad 1 = p - \frac{p}{q}$$

THEOREM. *(Hoeldersche Ungleichung) Seine $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (insbesondere auch $p = \infty$, $q = 1$ und $p = 1$, $q = \infty$ erlaubt). Ist $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ so gehoert $z = xy : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, z(k) = x(k)y(k)$, zu ℓ^1 und es gilt $\|z\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.*

Beweis. $p = \infty$*,* $q = 1$ *und* $p = 1$*,* $q = \infty$*:* einfach.
$1 < p, q < \infty$*:* Der Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ist einfach. Sei also nun $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Multipliziert man x oder y mit einem Faktor so skalieren beide Seiten mit diesem Faktor. Daher koennen wir ohne Einschraenkung annehmen $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Es gilt nach dem vorigen Lemma

$$|z(k)| = |x(k)y(k)| \leq \frac{1}{p}|x(k)|^p + \frac{1}{q}|y(k)|^q.$$

Summieren liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{1q} = 1.$$

Dabei haben wir die Normierungsbedingung in der mittleren Gleichung benutzt. □

Bemerkung. Die Aussage $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$ gilt fuer beliebige Funktionen x, y, wenn man den Wert ∞ erlaubt und $\infty \cdot 0 = 0$ setzt. (Die Behandlung der noch ausstehenden Faelle wird als Uebung gelassen.)

Theorem. *(Minkowski Ungleichung) Sei $p \in [1,\infty]$. Fuer $x, y \in \ell^p$ gilt dann*
$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweis. Die Faelle $p = 1$ und $p = \infty$ sind einfach.

Sei also nun $1 < p < \infty$. Sei q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gewaehlt. Wegen $q(p-1) = p$ sieht man leicht, dass fuer $z \in \ell^p$ die Funktion $|z|^{p-1}$ zu ℓ^q gehoert und
$$\||z|^{p-1}\|_q = \||z|^q\|^{1/q} = \|z\|_p^{p/q}$$
erfuellt. Damit koennen wir wie folgt abschaetzen:
$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|_p^p & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)+y(k)|^p \\ & \le & \displaystyle\sum_{k} \left(|x(k)||x(k)+y(k)|^{p-1} + |y(k)||x(k)+y(k)|^{p-1}\right) \\ (Hoelder) & \le & \|x\|_p \|x+y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \|x+y\|_p^{p/q} \\ & = & (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q}. \end{array}$$
Mit $1 = p - \frac{p}{q}$ folgt dann
$$\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^p \|x+y\|_p^{-p/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$
Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. (Uebung) Fuer $0 < p < 1$ (und $N > 1$) erfuellt die Funktion
$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty), \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{1/p}$$
nicht die Dreiecksungleichung.

Folgerung. *Es ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf ℓ^p fuer jedes $p \in [1,\infty]$.*

Beweis. Bis auf die Dreiecksungleichung ist alles direkt zu sehen. Die Dreiecksungleichung ist gerade die eben bewiesene Minkowski -Ungleichung. □

Ende der Vorlesung.

Theorem. *Sei $p \in [1,\infty]$. Dann ist ℓ^p mit $\|\cdot\|_p$ ein vollstaendiger normierter Raum.*

Beweis. Der Fall $p = \infty$ wurde schon behandelt. Sei also $1 \le p < \infty$. Sei (x_n) eine Cauchy Folge in ℓ^p. Dann existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit
$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum |x_n(k) - x_m(k)|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon$$
fuer alle $n, m \ge N_\varepsilon$. Wegen
$$|x_n(k) - x_m(k)| \le \|x_n - x_m\|_p$$
ist dann $(x_n(k))$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{K}$ fuer jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher existiert
$$x(k) := \lim_{n\to\infty} x_n(k)$$

und liefert eine Funktion auf $\mathbb{N}$. Fuer jedes $K \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{k=1}^{K} |x(k) - x_n(k)|^p = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_l(k) - x_l(k)|^p \leq \limsup_{l\to\infty} \|x_l - x_n\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

fuer $n \geq N_\varepsilon$. Da $K \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt

$$\|x - x_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_n(k)|^p \leq \varepsilon^p.$$

Damit folgt

$$x = x - x_n + x_n \in \ell^p \text{ sowie } \|x - x_n\|_p \to 0, n \to \infty.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. (Uebung) Zur Inklusion der ℓ^p:

- Fuer $p \in [1, \infty)$ gilt
$$\ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$$
und die Einbettung nach c_0 ist stetig. (Bew: Fuer $p \in [1, \infty)$ ist jedes Element von ℓ^p eine Nullfolge. Offenbar gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.)
- Fuer $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q$ und die Einbettung
$$\ell^p \longrightarrow \ell^q, x \mapsto x,$$
ist stetig mit Norm 1.
  (Bew. Ohne Einschraenkung $\|x\|_p = 1$ (sonst Normieren). Dann gilt $|x(k)| \leq 1$ fuer jedes k. Damit folgt fuer $q = \infty$ die Aussage sofort. Fuer $q < \infty$ folgt $|x(k)|^q \leq |x(k)|^p$ und damit $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^p \leq 1$. Damit folgt Stetigkeit der Einbettung mit Norm hoechstens Eins. Durch Betrachten von δ_1 sieht man, dass die Norm genau 1 ist.)
- Fuer $x \in \ell^s$ fuer ein $s \geq 1$ gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ fuer $p \to \infty$ (und $p \geq s$).
  (Bew. Fuer $x \in c_c$ ist die Aussage nicht schwer zu zeigen. Sei nun $x \in \ell^1$. (Der Fall von allgemeinen s geht genauso.) Es ist
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$
fuer alle p. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann x Zerlegen als $x = a+b$ mit $a \in c_c$, $\|a\|_\infty = \|x\|_\infty$ und $\|b\|_1 \leq \varepsilon$. Daher folgt
$$\|x\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_1 \leq \|a\|_p + \varepsilon.$$
Da $\|a\|_p \to \|a\|_\infty = \|x\|_\infty$ nach dem schon bewiesenen folgt die Aussage.

Proposition. *Fuer $1 \leq p < \infty$ ist ℓ^p separabel. Fuer $p = \infty$ ist ℓ^∞ nicht separabel.*

Beweis. Der Fall $1 \leq p < \infty$ ist einfach: Rationale endliche Linearkombinationen der δ_n, $n \in \mathbb{N}$, sind dicht.

Es bleibt den Fall $p = \infty$ zu untersuchen. Offenbar ist die Menge S der $0-1$ Folgen ueberabzaehlbar (vgl. Beweis der Ueberabzaehlbarkeit von $\mathbb{R}$). Weiterhin gilt fuer zwei verschiedene $0-1$-Folgen s_1 und s_2 offenbar

$$\|s_1 - s_2\|_\infty = 1.$$

Sei nun A eine dichte Teilmenge von ℓ^∞. Dann gibt es also zu jeder $0-1$ Folge s ein $a_s \in A$ mit $\|s - a_s\| \leq 1/3$. Daher sind dann a_s zu verschiedenen $s \in S$ verschieden. Insbesondere gibt es mindestens soviele Element in A wie in S. Also ist die Menge A ueberabzaehlbar. □

Wir kommen nun zu den Dualräumen der ℓ^p Räume

LEMMA. *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und q mit $1/q + 1/p = 1$ gegeben. Dann gilt fuer jedes $y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$*

$$\|y\|_q = \sup\{|\sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)| : x \in c_c, \|x\|_p = 1\}.$$

(Hier ist der Wert $\|y\|_q = \infty$ erlaubt, wenn y nicht zu ℓ^q gehoert). Gehoert y zu ℓ^q so gilt weiterhin

$$\|y\|_q = \sup\{|\sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\}.$$

Beweis. Wir setzen

$$T_1 := \sup\{|\sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)| : x \in c_c, \|x\|_p = 1\}$$

und

$$T_2 := \sup\{|\sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\}.$$

Fuer $y \in \ell^q$ gilt nach Hoelder $\|y\|_q \geq T_2$ und offenbar $T_2 \geq T_1$. Es bel Es bleibt also $T_1 \geq \|y\|_q$ (fuer beliebiges y) zu zeigen. (Denn dann folgen alle Aussagen einfach).

Idee: Teste mit $x(n) = Normierung \cdot \mathrm{sgn} y(n)|y(n)|^{q-1}$. Beachte $q - 1 = q/p$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei

$$x_N(k) := \frac{1}{(\sum_{k=1}^N |y_n|^q)^{1/p}} \mathrm{sgn} y(k)|y(k)|^{q/p},\ 1 \leq k \leq N; Osonst.$$

Dann gilt $x_n \in c_c$ mit $\|x_N\|_p = 1$ und

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{\infty} y(n)x_N(k)| &= \frac{1}{(\cdot)^{1/p}} \sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q\right)^{1-1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Damit koennen wir jetzt die Dualraeume der ℓ^p fuer $1 \leq p < \infty$ (NICHT $p = \infty$!!!) charakterisieren.

THEOREM. *($\ell^q = (\ell^p)'$) Sei $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Dann ist*

$$j : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)', \; j(y)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y(k)x(k)$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Es gehoert $j(y)$ in der Tat zu $(\ell^p)'$ und erfuellt $\|j(y)\| \leq \|y\|_q$ nach Hoelder Ungleichung.
j ist linear. klar.
j ist isometrisch (also insbesondere injektiv). Es gilt $\|j(y)\| \leq \|y\|_q$ wie schon diskutiert.
Es gilt $\|j(y)\| \geq \|y\|_q$:

$$\begin{aligned} \|j(y)\| &= \sup\{|j(y)(x)| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\} \\ &= \sup\{|\sum_{k=1}^{\infty} y(k)x(k)| : x \in \ell^p, \|x\|_p \leq 1\} \\ (Lemma) &= \|y\|_q. \end{aligned}$$

j ist surjektiv. Sei $\varphi \in (\ell^p)'$. Sei $y(n) := \varphi(\delta_n)$. (Wenn es ueberhaupt ein y gibt, so muss es dieses sein.) Dann gilt

$$\|y\|_q = \sup\{|\sum_{k=1}^{\infty} y(k)x(k) : x \in c_c \|x\|_p \leq 1\} \leq \|varphi\| \|x\|_q \leq \|\varphi\|$$

und es folgt $y \in \ell^p$. Wegen $p < \infty$ gilt

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} x(n)\delta_n.$$

(Hier ist $p < \infty$ wichtig. Fuer $p = \infty$ gilt das NICHT.) Damit folgt aus der Stetigkeit von φ also

$$\varphi(x) = \lim_{N \to \infty} \varphi(\sum_{k=1}^{N} x(n)\delta_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkungen.

- Im Surjektivitaetsteil des Beweis nutzt man die Dichtheit von c_c in ℓ^p, um die Gleicheit der Funktionale φ und $j(y)$ auf ℓ^p aus der Gleichheit auf c_c zu schliessen. Diese Dichtheit gilt nur fuer $1 \leq p < \infty$.
- Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $(\ell^p)^{=}\ell^q$ und $\ell^p = (\ell^q)'$ fuer alle $1 < p, q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Insbesondere ist ℓ^p reflexiv fuer $1 < p < \infty$.

- $p = 1$: Es ist $(\ell^1)' = \ell^\infty$. Weiterhin ist ℓ^1 enthalten in $(\ell^\infty)'$. Aber ℓ^∞ hat noch weitere Element (siehe Uebung: Bsp: Sei $L = (n_k)$ Folge in $\mathbb{N}$, die monoton gegen ∞ konvergiert. Sei
$$U_L := \{x \in \ell^\infty : \lim_{k\to\infty} x(n_k) \ \ \mathit{existiert}\}.$$
Dann laesst sich nach Hahn-Banach das Funktional
$$\psi_L : U_L \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \lim_{k\to\infty} x(n_k)$$
zu einem stetigen Funktional auf ℓ^∞ fortstetzen.) Damit ist ℓ^1 nicht reflexiv. Es ist aber ℓ^1 ein Dualraum, naemlich $\ell^1 = c_0'$.
- $p = \infty$. Es ist $(\ell^1)' = \ell^\infty$ aber $(\ell^\infty)'$ ist strikt groesser als ℓ^1 (siehe vorige Punkte). Insbesondere ist ℓ^∞ nicht reflexiv. (Denn - hier ohne Beweis- es ist ein Banachraum reflexiv genau dann, wenn sein Dualraum reflexiv ist.)
- Es ist $\ell^2 = (\ell^2)'$ (Hilbertraum, siehe spaeter).

Ende der Vorlesung

KAPITEL 7

Hilbertraumtheorie

In diesem Abschnitt studieren wir Vektorraume mit einem Skalarprodukt. Das Skalarprodukt erlaubt es Laengen UND Winkel zu messen. Wir beginnen mit einem Untersuchung von (Semi)Skalarprodukten.

1. Vektorräume mit Semiskalarprodukt

DEFINITION. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ heisst (semi) Skalarprodukt auf V, wenn gilt*

- $s(x, \lambda y + \mu z)) = \lambda s(x, y) + \mu s(x, z)$ *('s ist linear im zweiten Argument')*
- $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$
- $s(x, x) \geq 0$

fuer alle $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Gilt darueberhinaus noch $s(x, x) > 0$ fuer $x \neq 0$, so heisst s ein Skalarprodukt. Dann schreibt man meist $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bemerkungen.

- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt
$$s(\lambda x + \mu y, z) = \overline{\lambda} s(x, z) + \overline{\mu} s(y, z)$$
(d.h. s ist antilinear im ersten Argument.
- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt
$$s(0, 0) = 0$$
(Denn $0 = 0x$ also $s(0, 0) = s(0, 0x) = 0s(0, x) = 0$.)
- Manche Autoren definieren (Semi)skalarprodukte linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument. Das aendert strukturell nichts, führt aber zu (leichten) Veraenderungen in manchen Formeln.

Beispiele.

- $\mathbb{K}^N$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt
$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{N} \overline{x_j} y_j.$$
- $C[0, 1] =$ stetige Funktionen auf [0,1] mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt.$$
Beachte: $\langle f, f \rangle = 0$ ist nur fuer $f \equiv 0$ moeglich, da f stetig ist.

- $\mathcal{R}$:= Riemann intbare Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit
$$s(f,g) := \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$
Beachte: Das ist kein Skalarprodukt. (Beispiel...)
- $\ell^2 := \{c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |c(n)|^2 < \infty$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle c, d\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c(k)}d(k).$$
Beachte: Es ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tatsaechlich ein Skalarprodukt: Die Existenz der Summe folgt aus
$$|\overline{c(k)}d(k)| \leq \frac{1}{2}(|c(k)|^2 + |d(k)|^2).$$
Die weiteren Eigenschaften sind klar.

Wichtige Deutung. Ist $s(y, y) = 1$, so ist
$$z = x - s(y,x)y$$
senkrecht auf y d.h. es gilt $s(z, y) = 0$. Es gibt also $s(y, x)$ die Laenge der Komponente von x in Richtung y an. (Zeichnung.) Bew: Nachrechnen:
$$s(z,y) = s(x - s(y,x)y, y) = s(x,y) - \overline{s(y,x)}s(y,y) = 0.$$

Fuer Semiskalarprodukte gelten zwei fundamentale Formeln: die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Parallelogrammidentitaet. Das untersuchen wir nun:

Proposition. *(Cauchy-Schwarz-Bunyakowski Ungleichung) Sei $s(\cdot,\cdot)$ eine Semiskalarprodukt auf V. Dann gilt*
$$|s(x,y)| \leq s(x,x)^{1/2}s(y,y)^{1/2}.$$
fuer alle $x, y \in V$.

Beweis. Sei
$$F(t) := s(f + tg, f + tg) = \|f\|^2 + ts(f,g) + ts(g,f) + t^2\|g\|^2.$$
Nach Voraussetzung ist $F \geq 0$. Das ist nur moeglich, wenn die gewuenschte Ungleichung gilt. Hier sind die Details: Ohne Einschraenkung $s(f, g) \geq 0$ (sonst Multiplizieren mit $e^{i\alpha}$). Ohne Einschraenkung $s(f, g) > 0$ (sonst ist die Aussage sowieso klar). Damit gilt also
$$F(t) = \|f\|^2 + 2ts(f,g) + t^2\|g\|^2.$$
Wegen $F \geq 0$ und $s(f, g) \neq 0$ folgt $\|g\| > 0$. Dann ist auch
$$\frac{1}{\|g\|^2}F = \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} + 2t\frac{s(f,g)}{\|g\|^2} + t^2 = \left(t + \frac{s(f,g)}{\|g\|^2}\right)^2 + \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{s(f,g)}{\|g\|^2}\right)^2$$
ein nichtnegatives Polynom. Damit folgt
$$\frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{s(f,g)}{\|g\|^2}\right)^2 \geq 0.$$
Das liefert die Aussage. □

Bemerkung. Ist s ein Skalarprodukt und gilt $|s(x,y)| = s(x,x)^{1/2}s(y,y)^{1/2}$ fuer $x, y \in V$, so sind x und y linear abhaengig. (Uebung: O.E. $s(x,x) = s(y,y) = 1$. Betrachte $z = x - s(y,x)y$. Dann gilt

$$s(z,z) = s(x,x) - s(y,x)s(x,y) - \overline{s(y,x)}s(y,x) + |s(y,x)|^2 s(y,y) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Das zeigt $z = 0$.)

FOLGERUNG. *Ist s ein Semiskalarprodukt auf V, so ist*

$$\|x\| := s(x,x)^{1/2}$$

eine Halbnorm, d.h. es gilt

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
- $\|x\| \geq 0$,

fuer alle $x \in V$ und $\lambda \neq 0$. Ist s sogar ein Skalarpodukt, so ist $\|\cdot\|$ sogar eine Norm, d.h. es gilt zusaetzlich noch $\|x\| > 0$ fuer alle $x \neq 0$.

Beweis. Bis auf die erste Eigenschaft ist alles klar. Wir zeigen die erste Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= s(f + g, f + g) \\ &= s(f,f) + s(f,g) + s(g,f) + s(g,g) \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Es ist moeglich, die Werte von s auszurechnen, wenn man nur die Werte $\|x\| := s(x,x)^{1/2}$ fuer $x \in V$ kennt. Das ist unter dem Namen Polarisierung bekannt.

PROPOSITION. *(Polarisierung) Ist s ein Semiskalarprodukt auf V, so gilt mit $q(x) := s(x,x) = \|x\|^2$*

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)\right)$$

(falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

(falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Beweis. Das folgt direkt durch Einsetzen. □

Wir kommen nun zur Parallelogrammidentitaet.

PROPOSITION. *(Parallelogrammidentitaet) Sei s eine Semiskalarprodukt auf V und $q(x) = s(x,x)$. Dann gilt fuer alle $x, y \in V$*

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

(Zeichnung)

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung. □

Bemerkung. (Jordan/von Neumann) Eine (Halb)Norm auf einem Vektorraum wird genau dann durch ein (Semi)Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammidentitat gilt (Uebung). Die (Halb)Norm ist dann durch die Polarisierungsidentitaet gegeben. In diesem Sinne ist die Parallelogrammindentitaet die fundamentale Eigenschaft eines Raumes mit innerem Produkt. Gueltigkeit der Parallelogrammidentitaet ist damit der Test dafuer, ob eine Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird.

Ein wesentliches Konzept in Raeumen mit (Semi)skalarprodukt ist das der Orthogonalitaet.

DEFINITION. *(Orthogonal) Sei V Vektorraum mit Semikalarprodukt. Dann heissen $x, y \in V$ orthogonal $x \perp y$, wenn gilt*

$$s(x, y) = 0.$$

Gilt $A \subset V$, so definiert man das orthogonale Komplement von A durch $A^{\perp} := \{u \in V : s(u, a) = 0$ fuer alle $a \in A\}$.

Beispiele. V mit Skalarprodukt. Dann $V^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = V$.

DEFINITION. *Sei V ein Vektorraum mit Semiskalarprodukt s. Sei I eine Indexmenge und e_j, $j \in I$, Element von V. Dann heissen die e_j ein Orthonormalsystem (ONS), wenn gilt*

$$s(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

fuer alle $i, j \in I$.

Wir sammeln einige wesentliche Eigenschaften orthogonaler Vektoren:

PROPOSITION. *(Eigenschaften orthogonaler Vektoren) Sei V ein Vektorraum mit (Semi)Skalarprodukt s.*
(a) (Pythagoras) Gilt $x \perp y$ so folgt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(b) Ist e_j, $j = 1, \ldots, N$ ein endliches Orthonormalsystem so gilt fuer jedes $x \in V$

$$x - \sum_{j=1}^{N} s(e_k, x)e_k \perp e_j, \;\; j = 1, \ldots, N.$$

(c) (Besselsche Ungleichung) Ist $\{e_j : j \in I\}$ ein beliebiges Orthonormalsystem, so gilt fuer jedes $x \in V$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j \in I} |s(e_j, x)|^2.$$

Bemerkung. Zur Definition der Summe in (c): Ist I eine Indexmenge und sind $c_j, j \in I$, nichtnegative Zahlen, so definiert man

$$\sum_{j \in I} c_j := \sup\{\sum_{j \in A} c_j : A \subset I \text{ endlich}\}.$$

Aus
$$\sum_{j\in I} c_j < \infty$$
folgt dann, dass hoechstens abzaehlbar viele der c_j nicht verschwinden. (Da fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge
$$I_n := \{j \in I : c_j \geq 1/n\}$$
endlich sein muss und
$$\{j \in I : c_j \neq 0\} = \bigcup_n I_n$$
gilt.)

Beweis. (a) Direkte Rechnung:
$$\|x+y\|^2 = s(x+y, x+y) = s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) = \|y\|^2 + \|x\|^2.$$
(b) Direkte Rechnung (s.o. fuer den Fall eines Vektors e_1):
$$s(x - \sum_{k=1}^N s(e_k, x)e_k, e_j) = s(x, e_j) - \sum_{k=1}^N \overline{s(e_k, x)} s(e_k, e_j) = s(x, e_j) - s(x, e_j) = 0.$$
(c) Seien $e_{j_1}, \ldots, e_{j_N}$ ein beliebiges endliches Teilsystem von (e_j). Dann gilt:
$$\begin{array}{rcl} \|x\|^2 & = & \|x - \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} + \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k}\|^2 \\ & \overset{(a,b)}{=} & \|x - \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k}\|^2 + \|\sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k}\|^2 \\ & \geq & \|\sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k}\|^2 \\ (a) & = & \sum_{k=1}^N |s(e_{j_k}, x)|^2. \end{array}$$
Da die Aussage fuer beliebige endliche Teilsysteme gilt, folgt sie fuer die Ursprungsmenge. □

Die vorangehende Proposition zeigt die Nuetzlichkeit eines Orthonormalsystems. Aus jedem abzaehlbaren System linear unabhaengiger Vektoren kann man ein Orthonormalsystem gewinnen.

Proposition. *(Gram/Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seien die Vektoren $v_1, \ldots, v_N$ (bzw. v_j, $j \in \mathbb{N}$) linear unabhaengig. Dann bilden die induktiv definierten Vektoren*
$$e_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \; e_{k+1} := \frac{1}{\|v_{k+1} - \sum_{j=1}^k s(e_j, v_{k+1})e_j\|}(v_{k+1} - \sum_{j=1}^k s(e_j, v_{k+1})e_j)$$
ein Orthonormalsystem mit
$$Lin\{e_1, \ldots, e_k\} = Lin\{v_1, \ldots, v_k\}$$
fuer alle k.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach k gefuehrt ueber die Aussage $e_1, \ldots, e_k$ sind Orthonormalsystem mit mit $Lin\{e_1, \ldots, e_k\} = Lin\{v_1, \ldots, v_k\}$.
$k = 1$: klar.

$k \Longrightarrow (k+1)$: Es ist $w_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} s(e_j, v_{k+1}) e_j$ senkrecht auf e_l, $l = 1, \ldots, e_k$ (nach voriger Proposition) und verschwindet nicht (aufgrund der linearen Unabhaengigkeit der v_j und der Bedingung and die Huellen). Durch Normieren erhalten wir e_{k+1} und $e_1, \ldots, e_{k+1}$ bilden ein Orthonormalsystem. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} Lin\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\} &= Lin\{e_1, \ldots, e_k, w_{k+1}\} \\ &= Lin\{e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}\} \\ &= Lin\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Definition der $w's$ genutzt und im letzten Schritt die Induktionsannahme fuer k. □

Bemerkung. Auch wenn die (v_j) nicht linear unabhaengig sind, kann man das Gram/Schmidtsche Verfahren in einer einfachen Modifikation anwenden. Dazu streicht man alle diejenigen N bei denen $w_N = 0$ gilt.

2. Hilbertraeume

Wir untersuchen Entwicklungen der Form

$$x = \sum c_k e_k$$

mit e_k Orthonormalsystem und $\sum |c_k|^2 < \infty$. Im Hilbertraum gilt:

- Jedes x aus dem Raum kann eindeutig so dargestellt werden mit $c_k = s(e_k, x)$.
- Jede solche Summe stellt ein x aus dem Raum dar.

Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ traegt die Norm (s.o.)

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow [0, \infty), \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Damit wird dann eine Metrik $d = d_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ durch

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

auf V induziert. Wann immer im folgenden im Kontext eines Raumes mit Skalarprodukt von metrischen Eigenschaften (Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Abgeschlossenheit, Stetigkeit....) die Rede ist, wird die eben definierte Metrik zugrunde gelegt.

Proposition. *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und induzierter Metrik d. Dann sind $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig.*

Beweis. Das ist einfach:

Stetigkeit von $\| \cdot \|$: Es gelte $x_n \to x$. Zu zeigen $\|x_n\| \to \|x\|$...

Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$:...

□

DEFINITION. *Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und induzierter Metrik d heisst Hilbertraum, wenn er bzgl. d vollstaendig ist (d.h. jede Cauchy Folge bzgl. d einen Grenzwert hat).*

THEOREM. *(Approximationssatz) Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ist C eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V, so gibt es zu jedem $x \in V$ genau ein $y \in C$ mit*

$$\|x-y\| = d(x,C) := \inf\{\|x-z\| : z \in C\}.$$

Damit existiert also die beste Approximation an x in C. (Zeichnung.)

Bemerkung. Bei dem Satz handelt es sich um eine fundamentale Eigenschaft eines Hilbertraum. Entsprechend spielen die fundamentalen Eigenschaften des Hilbertraum naemlich Vollstaendigkeit und Parallelogrammidentitaet eine Rolle:

Beweis. Es gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Sei $d := d(x,C)$.

Eindeutigkeit. Seien y_1, y_2 Punkte mit $d(y_i,C) = d$ fuer $i = 1,2$. Anwenden der Parallelogrammidentitaet mit $x - y_1$ statt x und $x - y_2$ statt y liefert

$$\|2x - y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_1\|^2.$$

Damit folgt

$$4\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 4d^2.$$

Aufgrund der Konvexitaet und der Definition von d laesst sich der linkeste Term durch $4d^2$ nach unten abschaetzen. Damit folgt

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 0.$$

Existenz. Sei (y_n) eine Folge in C mit

$$\|x - y_n\|^2 \to d^2.$$

Einsetzen in die Parallelogrammidentitaet mit $x - y_n$ stattt x und $x - y_m$ statt y liefert (wie im Eindeutigkeitsteil)

$$4\|x - \frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Wieder laesst sich der linkeste Term durch $4d^2$ abschaetzen. Ausserdem konvergiert die rechte Seite gegen $4d^2$. Damit folgt (Details, Zeichnung Parallelogramm)

$$\|y_n - y_m\| \to 0.$$

Daher ist (y_n) eine Cauchy Folge. Aufgrund der Hilbertraumeigenschaft konvergiert dann (y_n). Da A abgeschlossen ist, gehoert der Grenzwert y wieder zu A. Weiterhin gilt nach Definition

$$\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d.$$

□

Bemerkung.

- Sowohl die Voraussetzung der Konvexitaet als auch der Abgeschlossenheit sind noetig. (Uebung):

  Ist die Menge konvex, aber nicht abgeschlossen, so muss es keine beste Approximation geben (sie koenne ja gerade fehlen).

  Ist die Menge abgeschlossen und nicht konvex, kann es z.b. mehrere beste Appoximationen geben (klar). Es kann dann auch keine beste Approximation geben, wie man am Beispiel von ℓ^2 mit $x = e_1$. $A = \{(1 + \frac{1}{j})e_j : j > 1\}$ sieht.
- Im endlichdimensionalen Hilbertraum gibt es natuerlich beste Approximationen fuer beliebige abgeschlossenen Mengen. (Warum? Kompaktheit!)
- In Raeumen, die keine Hilbertraeume sind, gilt die Aussage im allgemeinen nicht (Uebung).

Eine wichtige Folgerung des Approximationssatzes ist der Projektionssatz. Dabei wird im Approximationssatz als C ein abgeschlossener Unterraum gewaehlt.

THEOREM. *(Projektionssatz) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Dann laesst sich jedes $x \in V$ eindeutig schreiben als*

$$x = y + z \;: mit\; y \in U \; und \; z \in U^{\perp}$$

und es gilt

$$\|x - y\| = \min\{\|x - u\| : u \in U\}.$$

Beweis. Es ist dreierlei zu zeigen: Eindeutigkeit, Existenz und minimierende Eigenschaft von y. Wir werden y aus dem Approximationssatz waehlen und dann entsprechende Orthogonalitaet zeigen.

Eindeutigkeit. Sei $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y \in U$ und $z, z' \in U^{\perp}$. Dann gilt

$$y - y' = z' - z \in U \cap U^{\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt die Eindeutigkeit.

Existenz: Es ist U abgeschlossen und konvex. Daher existiert nach dem vorigen Satz ein (eindeutiges) $y \in U$ mit

$$\|x - y\| = d(x, U) = \inf\{\|x - z\| : z \in U\}.$$

Sei $z = x - y$. Dann gilt also

$$x = y + z$$

mit $y \in U$.
Noch zu zeigen $z \perp U$: Sei $u \in U$ beliebig. Dann hat die Funktion

$$F = F_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), F(t) = \|(x - y) + tu\|^2$$

ein Minimum bei $t = 0$ nach Konstruktion von $z = x - y$. Es gilt

$$F(t) = \|x - y\|^2 + t\langle x - y, u\rangle + t\langle u, (x - y)\rangle + t^2\|u\|^2,$$

also

$$F(t) = \|x - y\|^2 + 2t\Re\langle (x - y), u\rangle + t^2\|u\|^2.$$

Da F diffbar ist und ein Minimum in $t = 0$ hat folgt

$$0 = F^{'}(0) = \Re\langle (x - y), u\rangle$$

fuer jedes beliebige $u \in U$. Damit folgt

$$0 = \Re\langle (x-y), \lambda u\rangle$$

fuer alle $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit $\lambda = \overline{\langle (x-y), u\rangle}$ folgt

$$0 = |\langle (x-y), u\rangle|^2.$$

Das liefert die gewuenschte Orthogonalitaet. □

Beispiel. Seien $e_1, \ldots, e_N$ ein (ONS) in einem Hilbertraum und $U := Lin\{e_1, \ldots, e_N\}$. Dann gilt fuer $x \in V$ aber

$$x = y + z$$

mit $y = \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j \in U$ und $z = x - y \in U^\perp$. Damit handelt es sich um die in dem vorigen Theorem beschriebene eindeutige Darstellung von x. Insbesondere gilt also fuer jedes $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$

$$\|x - \sum_{j=1}^N c_j e_j\|^2 \geq \|x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j\|^2.$$

(Es ist instruktiv auch direkt die beste Approximationseigenschaft nachzurechnen: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x - \sum_{j=1}^N c_j e_j\|^2 &= \|(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) + \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j - \sum_{j=1}^N c_j e_j\|^2 \\
&= \|(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) + \sum_{j=1}^N (\langle e_j, x\rangle - c_j) e_j\|^2 \\
(Pythagoras) \quad &= \|(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j)\|^2 + \|\sum_{j=1}^N (\langle e_j, x\rangle - c_j) e_j\|^2 \\
&\geq \|(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j)\|^2.
\end{aligned}$$

Es wird also die Differenz minimal fuer $c_j = \langle e_j, x\rangle$.)

Die Rollen von U und $U^\perp$ bei der Zerlegung eines x sind austauschbar, wie die folgende Folgerung zeigt.

FOLGERUNG. *Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, so gilt $(U^\perp)^\perp = U$.*

Beweis. $U \subset U^{\perp\perp}$: Fuer $x \in U$ und $z \in U^\perp$ gilt nach Definiton von $U^\perp$

$$\langle x, z\rangle = 0.$$

Damit gilt $x \in U^{\perp\perp}$

$U^{\perp\perp} \subset U$: Sei $x \in U^{\perp\perp}$. Dann gilt nach dem vorigen Satz $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Damit folgt

$$z = x - y \in U^\perp \cap U^{\perp\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt $x = y \in U$. □

Definition. *Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraum H, so heisst die Abbildung*

$$P_U : H \longrightarrow H, x \mapsto y$$

(mit $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$) die orthogonale Projektion auf U.

Bemerkung. (Uebung) Es gilt fuer $P = P_U$ folgendes:

- $I = P_U + P_{U^\perp}$. (Das folgt leicht aus dem schon gezeigten $(U^\perp)^\perp = U$.)
- $P = P^2$. ' P ist idempotent' (Da $Px = Px + 0$ mit $Px \in U$ und $0 \in U^\perp$ und eine solche Zerlegung eindeutig ist.)
- $\langle Pw, v\rangle = \langle w, Pv\rangle$. fuer alle $v, w \in H$. 'P ist selbstadjungiert' (Denn $w = y + z$, $v = y' + z'$. Nun nachrechnen...)

Umgekehrt laesst sich zeigen, dass jede lineaere stetige Abbildung, die selbstadjungiert und idempotent ist, eine orthogonale Projektion ist, wobei der zugehoerige Unterraum gerade das Bild der Abbildung ist. (Dazu betrachtet man $x = Px + (x - Px))$ und nutzt $Px \in Bild(P)$ sowie (kleine Rechnung) $x - Px \perp Bild(P)$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt dann die gewuenschte Aussage.)

Aus der vorangegangenen Folgerung ziehen wir nun noch zwei weitere Folgerungen.

Folgerung. *Ist A eine beliebige Teilmenge eines Hilbertraumes, so gilt $\overline{Lin(A)} = A^{\perp\perp}$.*

Beweis. Mit $A^\perp = (LinA)^\perp = (\overline{LinA})^\perp$ folgt (b) sofort aus (a). □

Lemma. *Sei A eine Teilmenge eines Hilbertraumes. Dann sind aequivalent:*

(i) $\overline{LinA} = V$
(ii) $A^\perp = \{0\}$.

Beweis. Das folgt leicht aus $\overline{Lin(A)} = A^{\perp\perp}$. □

Bemerkung. Es ist wesentlich, dass es sich um einen Hilbertraum handelt: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der nicht vollstaendig ist, so gibt es einen abgeschlossenen Unteraum U mit $U^\perp = \{0\}$ und $U \neq V$. (Uebung).

Definition. *Eine Menge A wie im Lemma heisst total oder auch Erzeugendensystem.*

Wir wenden uns nun Entwicklungen nach Orthonormalsystemen zu. Da wir apriori keine Abzaehlbarkeitsforderungen an die Indexmengen unserer Orthonormalsystem stellen, erweist sich folgende Notation als sinnvoll: Sei J eine Menge. Sei F eine Funktion auf den endlichen Teilmengen von J mit Werten in einem normierten Raum X. Dann definieren wir

$$\lim_{A \to J} F(A) = x,$$

falls fuer jedes $\varepsilon > 0$ eine endliches $A \subset J$ existiert mit

$$\|F(B) - x\| \leq \varepsilon$$

fuer jedes endliche $B \supset A$. Entsteht F als $F(A) = \sum_{j \in A} x_j$ fuer eine Funktion $x : J \longrightarrow X$, so schreiben wir auch

$$\sum_{j \in J} x_j := \lim_{A \to J} F(A) = \lim_{A \to J} \sum_{j \in A} x(j).$$

THEOREM. *(Darstellung mit Koeffizienten)Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein Hilbertraum und* (e_j) *ein ONS. Seien* $c_j \in \mathbb{K}$ *mit* $\sum |c_j|^2 < \infty$ *gegeben. Dann existiert*

$$x = \sum_{j \in J} c_j e_j = \lim_{A \to J} \sum_{j \in A} c_j e_j$$

(d.h. es gibt ein $x \in V$*, sodass zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein endliches* A *existiert mit*

$$\|x - \sum_{j \in B} c_j e_j\| < \varepsilon$$

fuer alle endlichen $B \supset A$*) und es gilt*

$$\|x\|^2 = \sum |c_j|^2.$$

Beweis. Es koennen nur abzaehlbar viele c_j nicht verschwinden. Daher koennen wir ohne Einschraenkung annhemen, dass die Indexmenge abzaehlbar ist. Wir zeigen zunaechst, dass

$$S_N : \sum_{j=1}^{N} c_j e_j$$

eine Cauchy Folge ist. Es gilt

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{j=N+1}^{M} |c_j|^2 \to 0, N, M \to \infty.$$

Daher konvergiert (S_N) gegen ein $x \in V$ (Hilbertraum). Wegen $\sum |c_j|^2 < \infty$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches A mit

$$\sum_{j \notin B} |c_j|^2 < \varepsilon$$

fuer alle $B \supset A$. Damit gilt dann fuer solche B

$$\|x - \sum_{j \in B} c_j e_j\|^2 = \lim_{N \to \infty} \|S_N - \sum_{j \in B} c_j e_j\|^2 \leq \sum_{j \notin A} |c_j|^2 < \varepsilon.$$

Damit ist $x = \lim_{A \to J} \sum_{j \in A} c_j e_j$ gezeigt. Es folgt

$$\|x\|^2 = \lim_{A \to J} \| \sum_{j \in A} c_j e_j\|^2 = \lim_{A \to J} \sum_{j \in A} |c_j|^2 = \sum_{j \in J} |c_j|^2.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Der Satz liefert insbesondere, dass man die Reihe umsortieren kann. (Denn es kommt nur darauf an die 'wesentilchen' c_j beruecksichtigt zu haben.)

Ende der Vorlesung.

Folgerung. *(Allgemeine Besselsche Ungleichung) Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalsystem (e_j). Dann existiert fuer jedes $x \in H$ der Vektor*

$$y := \sum_{j \in J} \langle e_j, x \rangle e_j = \lim_{A \to J} \sum_{j \in A} \langle e_j, x \rangle e_j$$

und es gilt

$$x - y \perp e_j, j \in J, \ \textit{sowie} \ x - y \perp y.$$

Insbesondere gilt

$$\|x\|^2 = \|x - \sum \langle e_j, x \rangle e_j\|^2 + \sum |\langle e_j, x \rangle|^2.$$

Beweis. Nach dem vorigen Theorem und der Besselsche Ungleichung existiert $y := \sum \langle e_j, x \rangle e_j = \lim_{A \to J} y_A$ mit $y_A := \sum_{j \in A} \langle e_j, x \rangle e_j$ fuer $A \subset J$ endlich. Wir zeigen zunaechst $y \perp e_k$:

$$\langle y, e_k \rangle = \lim_{A \to J} \langle y_A, e_k \rangle = \lim_{A \to J} 0 = 0.$$

Damit folgt $\langle x - y, y_A \rangle = 0$ fuer jede endliche Teilmenge A von J und damit

$$\langle x - y, y \rangle = 0.$$

Das liefert

$$\|x\|^2 = \|(x - y) + y\|^2 = \|(x - y)\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \sum_j |\langle e_j, x \rangle|^2.$$

Das beendet den Beweis. □

Lemma. *(Charakterisierung Basis) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und (e_j) ein Orthonormalsystem. Dann sind aequivalent:*

(i) *$\{e_j : j \in I\}$ ist maximal (d.h. jedes ONB $\{e'_\alpha : \alpha \in A\}$, das (e_j) enthaelt stimmt mit diesem ueberein).*
(ii) *Es gilt $\{e_j : j \in I\}^\perp = \{0\}$.*
(iii) *Es gilt $\overline{Lin\{e_j\}} = V$.*
(iv) *Fuer jedes $x \in V$ gilt $x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j$.*
(v) *Fuer jedes $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x \rangle|^2$. (Parsevalsche Gleichung)*

Beweis.
(i)$\Longrightarrow$ (ii): Waere die Aussage $\{e_j\}^\perp = \{0\}$ falsch, so gaebe es ein $x \perp \{e_j\}$ mit $x \neq 0$ und das widerspraeche der Maximalitaet von (e_j).

(ii)$\Longleftrightarrow$ (iii): Das wurde oben schon gezeigt.

(ii) / (iii)$\Longrightarrow$ (iv): Nach Besselscher Ungleichung gilt $\sum |\langle e_j, x \rangle|^2 < \infty$. Damit existiert nach dem Darstellungssatz $y = \sum \langle e_j, x \rangle e_j$. Es ist nach Konstruktion $x - y \in \{e_j\}^\perp$. Mit (ii) folgt dann $x - y = 0$ und damit

$$x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j.$$

(iv)$\Longrightarrow$ (v): Das folgt aus dem vorangehenden Darstellungssatz.

(v)$\Longrightarrow$ (iv): Nach dem Darstellungssatz und Besselscher Ungleichung existiert $y := \sum \langle e_j, x \rangle e_j$ und es gilt

$$\|y\|^2 = \sum_j |\langle e_j, y \rangle|^2.$$

Weiterhin gilt (nach der ueblichen Rechnung) auch $x - y \perp y$. Damit folgt aus (v) und dem Satz des Pythagoras also

$$\|y\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x\rangle|^2 \stackrel{(v)}{=} \|x\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2.$$

Also folgt $\|x-y\|^2 = 0$ und damit $x = y$.
(iv)$\Longrightarrow$ (i): Sei $x \perp e_j$ fuer alle $j \in I$. Nach (iv) kann man x darstellen als

$$x = \sum \langle e_j, x\rangle e_j = \sum 0 e_j = 0.$$

Das liefert (i). □

Definition. *(Basis) Ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum heisst (Orthonormal)basis (ONB), wenn es eine der Eigenschaften des vorangehenden Lemma erfuellt.*

Bemerkung. Im folgenden wird manchmal verkuerzt von Basis statt von Orthonormalbasis gesprochen.

Beispiel. ℓ^2 Es ist (der oben eingefuehrte Vektorraum mit Skalarprodukt) ℓ^2 ein Hilbertraum und die $e_j, j \in \mathbb{N}$ mit $e_j(k) = \delta_{j,k}$ bilden eine Orthonormalbasis.
Bew. Wir zeigen zunaechst die Vollstaendigkeit: Sei $(x^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in ℓ^2. Dann ist fuer jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(x^{(n)}(j))_n$ eine Cauchy-Folge, denn es gilt (da $(x^{(n)})$ Cauchy-Folge ist)

$$|x^{(n)}(j) - x^{(m)}(j)| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\| \to 0, n, m \to \infty.$$

Aufgrund der Vollstaendigkeit von $\mathbb{K}$ existiert dann fuer jedex $j \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$x(j) := \lim_{n\to\infty} x^{(n)}(j).$$

Sei x die Funktion

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, j \mapsto x(j).$$

Es reicht, nun $x \in \ell^2$ und $x^{(n)} \to x$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $n_\varepsilon > 0$ mit

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 \leq \varepsilon$$

fuer $n, m \geq n_\varepsilon$ gewaehlt. Dann gilt fuer jedes $N \in \mathbb{N}$ also

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N |x(j) - x^{(n)}(j)|^2 &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^N |x^{(k)}(j) - x^{(n)}(j)|^2 \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^{(n)}\|^2 \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt dann

$$\sum_{j=1}^\infty |x(j) - x^{(n)}(j)|^2 \leq \varepsilon$$

fuer alle $n \geq n_\varepsilon$. Damit gehoert

$$x = (x - x^{(n)}) + x^{(n)}$$

also zu ℓ^2 und es gilt $x^{(n)} \to x$.

Wir zeigen nun, dass die $e_j, j \in \mathbb{N}$ eine ONB bilden: Es reicht zu zeigen, dass ein $x \in \ell^2$ mit $x \perp e_j$ fuer alle $j \in \mathbb{N}$ verschwinden muss. Das ist aber klar. Das beendet den Beweis.

Notation. Ist $e_j, j \in I$, eine Basis im Hilbertraum, so kann man also nach dem vorigen Lemma jedes x aus dem Hilbertraum darstellen als

$$x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Dies Darstellung heisst *Entwicklung von x* nach der Basis e_j, $j \in I$. Die Zahlen $\langle e_j, x \rangle$ heissen *Koeffizienten* der Entwicklung. Man kann sie als Koordinaten deuten. Tatsaechlich handelt es sich, falls der Hilbertraum der Euklidische Raum $\mathbb{K}^N$ ist und $e_j, j = 1, \ldots, N$ die Standardorthonormalbasis, genau um die Koordinaten. Denn fuer jedes Element $x \in \mathbb{K}^N$ gilt offenbar die Gleichung

$$x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Man kann nach Auswahl einer Basis in jedem Hilbertraum (fast) genauso mit Koordinaten 'rechnen' wie im Euklidischen Raum und das ist einer der grossen Vorteile von Hilbertraeumen. Das werden wir nun diskutieren:

FOLGERUNG. *Sei $e_j, j \in I$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum V. Dann gilt fuer x und y aus V:*

- $x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j$.
- $\|x\|^2 = \sum |\langle e_j, x \rangle|^2$.
- $\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$.

Beweis. Die erste und zweite Aussage folgen sofort aus der Charakterisierung einer Basis im vorangehenden Lemma. Die letzte Eigenschaft folge einfach durch Grenzwertbildung. □

Bemerkung. Die Eigenschaft (iv) eines Orthonormalsystem in obigem Lemma wird (in der Physik) auch als Vollstaendigkeitsrelation bezeichnet und als

$$I = \sum |e_j\rangle \langle e_j|$$

geschrieben.

Mittels Basen kann man die orthogonale Projektion auf einen Unterraum explizit ausrechnen:

FOLGERUNG. *Sei V Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Sei (e_j) eine Basis von U. Dann ist die orthogonale Projektion von V auf U gegeben durch*

$$P_U x := \sum_j \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Beweis. Es gilt $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \perp U$. Wegen $y \in U$, der Konstruktion der (e_j) und wegen $z \perp U$ gilt

$$P_U x = y = \sum \langle e_j, y \rangle e_j = \sum \langle e_j, y + z \rangle e_j.$$

Das liefert die Aussage. □

Die vorangehenden Betrachtungen zeigen den Nutzen von Basen. Als naechstes geht es darum, Existenz einer Basis zu zeigen.

THEOREM. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Basis. Diese Basis kann genau dann mit abzaehlbarer Indexmenge gewaehlt werden, wenn der Hilbertraum eine abzaehlbare totale Menge besitzt.*

Beweis. Wir unterscheiden zwei Faelle:

Fall 1: Der Hilbertraum hat eine abzaehlbar totale Menge. Anwenden des Gram/Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren auf diese Menge liefert ein abzaehlbares totales Orthonormalsystem. Dieses ist nach der Charakterisierung eine Basis.

Fall 2: Der Hilbertraum hat keine abzaehlbar totale Menge. Dann gibt es insbesondere auch keine abzaehlbare Orthonormalbasis (denn eine Orthonormalbasisist immer total). Mit dem Zornschen Lemma kann man aber die Existenz eines maximalen ONS zeigen. Dieses ist nach der vorangegangenen Charakterisierung eine Orthonormalbasis. □

DEFINITION. *Ein Hilbertraum heisst separabel, wenn er eine abzaehlbares totale Menge besitzt.*

Bemerkung. Existenz einer abzaehlbaren totale Menge ist aequivalent zur Existenz einer abzaehlbaren dichten Menge. (Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten....)

Beispiel. ℓ^2 Offenbar ist ℓ^2 ein separabler Hilbertraum.

Das ist in gewisser Weise das allgemeinste Beispiel eines separablen Hilbertraumes.

THEOREM. *(Separable Hilbertraeume sind ℓ^2). Sei H ein beliebiger separabler Hilbertraum und (e_j) eine Orthonormalbasis. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung*

$$J : \ell^2 \longrightarrow H \ \ mit \ \ J(\delta_n) = e_n$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung ist bijektiv, und es gilt $\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$.

Beweis. Existenz. Fuer $x \in \ell^2$ ist $\sum |x(k)|^2$ endlich und damit existiert in H auch $\sum x(k)e_k$. Wir definieren $J(x) := \sum x(k)e_k$. Dann ist (offenbar) J linear und aufgrund der Paresevalschen Gleichung gilt

$$\langle J(x), J(x) \rangle = \|J(x)\|^2 = \sum |x(k)|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Damit ist J eine Isometrie also stetig. Offenbar gilt $J(\delta_n) = e_n$.

Eindeutigkeit. Da $Lin\{\delta_n\}$ dicht ist, folgt die Eindeutigkeit.

Zur letzten Aussage: Da die Abbildung eine Isometrie ist, ist sie injektiv. Jedes $x \in H$ laesst sich als $\sum c_j e_j$ mit $\sum |c_j|^2 < \infty$ darstellen und erfuellt also $x = J((c_j))$. Damit ist J surjektiv. Mit Polarisation folgt man aus Normerhaltung leicht, dass

$$\langle J(x), J(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

fuer alle $x, y \in \ell^2$. Da die Abbildung eine Isometrie ist, ist sie injektiv. $\square$

Ende der Vorlesung.

3. Dualraum eines Hilbertraumes: Rieszscher Darstellungssatz

Zum Abschluss bestimmen wir noch den Dualraum eines Hilbertraum.

THEOREM. *(Rieszscher Darstellungssatz) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann erzeugt jedes $y \in H$ durch*

$$F_y : H \longrightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \langle y, \cdot\rangle$$

ein stetiges lineares Funktional auf H mit $\|F_y\| = \|y\|$. Die Abbildung

$$H \longrightarrow H', y \mapsto F_y,$$

ist antilinear (d.h. $F_{\lambda x+\mu z} = \overline{\lambda}F_x + \overline{\mu}F_z$) und bijektiv. Jedes stetige lineare Funktional auf H wird also eindeutig durch ein F_y dargestellt.

Bemerkung. Die entscheidende Aussage ist die Surjektivitaet von F.
Beweis. Fuer jedes $y \in H$ ist F_y offenbar ein lineares Funktional mit

$$|F_y(x)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|y\|\|x\|.$$

Also ist F_y stetig mit $\|F_y\| \leq \|y\|$. Wegen $F_y(y) = \|y\|^2$ gilt sogar $\|F_y\| = \|y\|$ und $y \mapsto F_y$ ist injektiv. Die Antilinearitaet ist einfach zu zeigen. Da $y \mapsto F_y$ isometrisch ist, folgt aus der (Anti)linearitaet, dass $y \mapsto F_y$ injektiv ist.

Noch z.z. F ist surjektiv: Sei $\varphi \in H'$. Wir unterscheiden zwei Faelle:

$\varphi \equiv 0$. Dann koennen (muessen ;-) wir $y = 0$ waehlen.

Nicht $\varphi \equiv 0$. Dann ist $N := Ker\varphi$ ein abgeschlossener echter Unterraum von H. Damit ist $N^\perp \neq \{0\}$. (Sonst: $N = N^{\perp\perp} = H$, also $\varphi = 0$). Sei $z \in N^\perp$ mit $z \neq 0$ beliebig. Dann gehoert fuer jedes $x \in H$ das Element

$$\varphi(x)z - \varphi(z)x$$

zu $Ker\varphi$ (Nachrechnen!!!). Also gilt wegen $z \in N^\perp$ dann

$$0 = \langle z, \varphi(x)z - \varphi(z)x\rangle = \varphi(x)\langle z, z\rangle - \varphi(z)\langle z, x\rangle.$$

Damit folgt

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2}\langle z, x\rangle = \langle\overline{\frac{\varphi(z)}{\|z\|^2}}, z, x\rangle.$$

Das liefert die Behauptung mit $y = \overline{\frac{\varphi(z)}{\|z\|^2}}z$. $\square$

Bemerkung. Es man (zunaechst) verblueffen, dass wir irgendein $z \in N^\perp$ waehlen konnten. Aber nachtraeglich wird klar, das $N = \{y\}^\perp = \{z\}^\perp$ gilt und damit

$$N^\perp = (Lin\{z\})^{\perp\perp} = Lin\{z\}$$

eindimensional ist. Zeichnung: Kern als Hyperebenen, Niveauflaechen.... (Damit kann man auch einen alternativen Beweis wie folgt geben: Schritt 1: $N := Ker\varphi$. Dann ist $N^\perp$ eindimensional. (Bew. $x \in N^\perp$, $z \in N^\perp$. Dann ist

$$x - \varphi(x)/\varphi(z)z \in N \cap N^\perp = \{0\}.$$

Sei nun $z \in N^\perp$ mit $\varphi(z) = 1$. Dann gilt

$$z \perp x - \langle x, z\rangle z$$

und damit $x - \langle x, z\rangle z \in N^{\perp\perp} = N$. Das liefert die Aussage.)

4. Einige weitere Aspekte

Einige Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach sind im Hilberteraum trivial, da man direkt mit orthogonalen Projektionen und aehnlichem arbeiten kann. Wir notieren einige einfache Eigenschaften in diesem Kontext.

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Fuer jeden Vektor $x \in H$ gilt

$$\|x\| = \sup\{|\langle y, x\rangle : y \in H\}.$$

Das folgt durch Cauchy-Schwarz und einsetzen von $y = \frac{1}{\|x\|}x$. (Alternativ kann man es aus dem Satz von Hahn-Banach und der Identifikation des Dualraumes als H herleiten.)

Fuer jedes Operator T von H in einen Hilberraum K gilt

$$\|T\| = \sup\{|\langle y, Tx\rangle| : \|y\|_K \leq 1, \|x\|_H \leq 1\}.$$

Das folgt aus der vorigen Beobachtung und der Definition von $\|T\|$. (Alternativ kann man es aus dem Satz von Hahn-Banach und der Identifikation des Dualraumes als H herleiten.)

Ist U ein abgeschlossener Unterraum von H mit $U \neq H$, so existiert ein $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|x - u\| = 1$$

fuer alle $u \in U$. Man kann naemlich einfach ein beliebiges normiertes $x \in U^\perp$ waehlen. (Ein solches existiert wegen $H = U^\perp \oplus U^{\perp\perp} = U^\perp \oplus \overline{U} = U^\perp \oplus U$ und $U \neq H$).

KAPITEL 8

Anwendungen des Satz von Baire auf beschraenkte Operatoren

Es gibt vier grosse Anwendungen des Satz von Baire in der Operatortheorie. Diese sind

- Der Satz von Banach / Steinhaus auch bekannt als Prinzip der gleichmaessigen Beschraenktheit.
- Der Satz von der offenen Abbildung.
- Der Satz von der stetigen Inversen.
- Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Die ersten drei Anwendungen setzen Stetigkeit der involvierten Operatoren voraus. Sie werden in diesem Kapitel behandelt. Die vierte Anwendung wird im kommenden Kapitel behandelt.

THEOREM. *(Satz von Banach Steinhaus / Prinzip der gleichmaessigen Beschraenktheit) Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *eine Banachraum und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *ein normierter Raum. Seien* $T_\alpha, \alpha \in A$, *beschraenkte Operatoren von* E *nach* F. *Ist* T_α, $\alpha \in A$, *punktweise beschraenkt (d.h. es gibt fuer jedes* $x \in E$ *ein* C_x *mit* $\|T_\alpha x\| \leq C_x$ *fuer alle* α*) so ist* T_α *gleichmaessig beschraenkt (d.h. es gibt* $C \geq 0$ *mit*

$$\|T_\alpha\| \leq C$$

fuer alle $\alpha \in A$*).*

Beweis. Wir beweisen den Satz in zwei Schritten.
Schritt 1. Es existiert eine Kugel $U_r(p)$ mit $\|T_\alpha x\| \leq C_0$ fuer alle $x \in U_r(p)$.
Bew. Sei

$$F_k := \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq k \text{ fuer alle } \alpha \in A\} = \cap_{\alpha \in A}\{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq k\}.$$

Dann ist F_k abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen (da jedes T_α stetig ist). Wegen der punktweisen Beschraenktheit gilt weiterhin

$$E = \cup F_k.$$

Damit folgt nach dem Satz von Baire die Aussage.

Schritt 2. Es existiert ein $C > 0$ mit $\|T_\alpha\| \leq C$ fuer alle $\alpha \in A$.
Bew. Fuer $\|x\| < r$ gilt

$$\|T_\alpha x\| \leq \|T_\alpha(x + p)\| + \|T_\alpha p\| \leq C_0 + C_p.$$

Damit folgt die Aussage mit $C := \frac{C_0 + C_p}{r}$. □

THEOREM. *(Satz von der offenen Abbildung) Seien* E, F *Banachraeume und* $T : E \longrightarrow F$ *eine linearer beschraenkter Operator. Ist* T *surjektiv, so ist* T *offen (d.h. fuer jede offenen Menge* $U \subset E$ *ist auch* TU *offen in* F*).*

Beweis. Seien U_r bzw. V_r die offenen Kugeln um den Ursprung vom Radius r in E bzw. F.

Schritt 1. Fuer jedes $r > 0$ existiert ein $s > 0$ mit $V_s \subset \overline{TU_r}$.
Bew. Sei $\delta := r/2$. Dann gilt

$$E = \cup_n U_{n\delta} = \cup_n n U_\delta.$$

Damit folgt aufgrund der Surjektivitaet

$$F = TE = \cup_n nTU_\delta = \cup_N n\overline{TU_\delta}.$$

Nach dem Satz von Baire enthaelt dann eine der Mengen $n\overline{TU_\delta}$ eine offene Kugel. Dann gibt es also (Skalieren) eine offenen Kugel V mit

$$V \subset \overline{TU_\delta}.$$

(Diese Kugel liegt unter Umstaenden noch an der falschen Stelle). Wegen $\delta = r/2$ gilt $U_r \supset U_\delta - U_\delta$, also

$$TU_r \supset TU_\delta - TU_\delta.$$

Damit folgt

$$\overline{TU_r} \supset \overline{TU_\delta - TU_\delta} \supset \overline{TU_\delta} - \overline{TU_\delta} \supset V - V.$$

Die letzte Menge ist offen (als Vereinigung offener Mengen) und enthaelt den Ursprung.

Ende der Vorlesung.

Schritt 2. Fuer jedes $r > 0$ enthaelt TU_r eine Kugel um den Ursprung.
Bew. Sei $r_0 := r/2$. Sei s_0 nach Schritt 1 mit$V_{s_0} \subset \overline{TU_{r_0}}$ gewaehlt. Wir zeigen

$$V_{s_0} \subset TU_{2r_0} = TU_r.$$

Waehle dazu $r_n > 0$ mit $\sum_n r_n < r_0$ und s_n nach Schritt 1 mit

$$V_{s_n} \subset \overline{TU_{r_n}}.$$

Ohne Einschraenkung $s_n \to 0$ (sonst Verkleinern). Sei nun $y \in V_{s_0}$ beliebig. Dann gehoert also y zu $\overline{TU_{r_0}}$. DAher gibt es $x_0 \in U_{r_0}$ mit

$$\|y - Tx_0\| < s_1$$

also

$$y - Tx_0 \in V_{s_1}.$$

Wegen $V_{s_1} \subset \overline{TU_{r_1}}$ existiert dann $x_1 \in U_{r_1}$ mit

$$\|(y - Tx_0) - Tx_1\| < s_2,$$

also

$$y - Tx_0 - Tx_1 \in V_{s_2}.$$

Iteration liefert eine Folge (x_n) mit

- $x_n \in U_{r_n}$,
- $\|y - T(\sum_{k=0}^n x_k)\| < s_{n+1}$.

Wegen $\|x_k\| \leq r_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < r_0$ existier (E Banachraum)

$$x := \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} x_k$$

und erfuellt

$$\|x\| < r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 2r_0 = r$$

sowie

$$\|y - Tx\| = \lim_N \|y - T\sum_{k=0}^{N} x_k\| \leq \limsup s_{N+1} = 0.$$

Es ist also $y = Tx$ mit $x \in U_r$.

Es ist T offen. Sei $W \subset E$ offen und $x \in W$ und $y = Tx$. Dann existiert eine offene Kugel U um den Ursprung in E mit $x + U \subset W$. Nach Schritt 2 existiert eine offene Kugel V um 0 in F mit $V \subset TU$. Damit gilt

$$y + V \subset y + TU = Tx + TU = T(x + U) \subset TW.$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM. *(Satz von der stetigen Inversen) Seien E, F Banachraeume und $T : E \longrightarrow F$ linear beschraenkt und bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $T = (T^{-1})^{-1}$ offen. Damit ist fuer jede offene Menge U in E auch $T^{-1})^{-1}U$ offen und die Stetigkeit von T^{-1} folgt. □

Bemerkung. Aus dem Satz von der stetigen Inversen kann man auch den Satz von der offenen Abbildung herleiten, indem man zu Quotienteraeumen uebergeht. (Evtl. Details geben....)

KAPITEL 9

Abgeschlossene Operatoren und Invertierbarkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Operaton, die in zweierlei Hinsicht allgemeiner sind als z.B. Matrizen:

- Sie sind auf unendlichdimensionalen Raeumen definiert.
- Sie sind unbeschraenkt / nicht stetig.

Es zeigt sich, dass Unbeschraenktheit eng damit zusammen haengt, dass die Operatoren nicht ueberall definiert sind. Ein guter Ersatz fuer die Stetigkeit / Beschraenktheit ist die Abgeschlossenheit.

1. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Wir fuehren die Operatoren ein, die als Ersatz der stetigen Operatoren dienen.

Definition. *Seien E, F Vektorraeume. Ein linearer Operator von E nach F ist eine lineare Abbildung $T : D(T) \longrightarrow F$, wobei $D(T)$ ein Unterraum von E ist. Es heisst $D(T)$ der Definitionsbereiche von T und*

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

der Graph des Operator.

Fuer die weiteren Untersuchungen ist es nuetzlich, sich klar zu machen, dass Operatoren gewissen Unterraeumen entsprechen. Genauer gilt folgendes: Sind E und F Vektorraeume, so ist fuer jeden Operator T von E nach F der Graph $G(T)$ ein Unterraum G von $E \times F$ mit folgender Eigenschaft:

- $(0, y) \in G$ impliziert $y = 0$.

Umgekehrt ist jeder Unterraum G von $E \times F$ mit dieser Eigenschaft der Graph eines eindeutigen Operator T. Dieser ist gegeben durch

$$D(T) : \{x \in E : \text{es existiert } y \in F \text{ mit } (x, y) \in G\ \}$$

$$Tx = y.$$

Hierbei ist T wohldefiniert aufgrund der Vorrausetzung (Nachrechnen!). In diesem Sinne kann mal also Operatoren und (gewisse) Unterraeume identifizieren.

Notation. Ein Operator zwischen normierten Raeumen E nach F heisst beschraenkt, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $\|Tx\| \leq C\|x\|$ fuer alle $x \in D(T)$.

Beispiele.

- Multiplikationsoperator auf ℓ^2; maximaler Multoperator, Multoperator auf c_c.
- Δ auf L^2 auf C_c^∞...

Seien E, F normierte Raeume, so ist auch $E \times F$ mit
$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$$
ein normierter Raum. Er ist vollstaendig genau dann, wenn E und F vollstaendig sind. (Nachrechnen!).
Bemerkung. Man kann auch
$$\|(x,y)\|_p := (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$$
fuer $1 \leq p < \infty$ bzw.
$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}$$
einfuehren. Diese Normen sind alle aequivalent (da alle Normen auf endlichdimensionalen Raeumen

LEMMA. *Seien E, F normierte Raeume. Sei T ein linearer Operator von E nach F. Dann sind aequivalent.*

(i) *Es ist $G(T)$ abgeschlossen in $E \times F$.*
(ii) *Ist (x_n) eine Folge in $D(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$, so gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.*

Sind E, F Banachraeume so ist dies aequivalent zu

(iii) *$(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist vollstaendig, wobei $\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$.*

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (ii) ist klar, denn (ii) ist gerade die Folgencharakterisierung von Abgeschlossenheit. Die Aequivalenz von (i) und (iii) ist klar, denn $G(T)$ ist abgeschlossen, genau dann wenn $G(T)$ vollstaendig ist, was wiederum zur Vollstaendigkeit von $D(T)$ in $\|\cdot\|_T$ aequivaelent ist. (Evtl. direkter Beweis). □

DEFINITION. *Seien E, F normierte Raeume und T ein linearer Operator von E nach F. Dann heisst T abgeschlossen, wenn er eine der Eigenschaften des vorigen Lemma erfuellt.*

Bemerkung. Uns wird es eigentlich immer um abgeschlossene Operatoren gehen.

Wichtig. Stetigkeit eines Operators bedeutet $x_n \to x \Longrightarrow Tx_n \to Tx$. Damit ist Stetigkeit eine Forderung der **Konvergenz**.
Abgeschlossenheit eines Operators bedeutet $x_n \to x$ und $Tx_n \to y \Longrightarrow Tx_n \to Tx$. Damit ist Abgeschlossenheit lediglich eine Forderung der **Konsistenz**.

Die naechste Proposition besagt, dass Stetigkeit in der Tat eine staerkere Eigenschaft als Abgeschlosseheit ist.

PROPOSITION. *Beschraenkte Operatoren sind abgeschlossen) Seien E, F normierte Raeume und $T \in L(E, F)$. Dann ist T abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Dann gilt $x_n \to x$ und daher (T stetig) $Tx_n \to Tx$. Weiterhin gilt $Tx_n \to y$. Insgesamt folgt $Tx = \lim Tx_n = y$. □

PROPOSITION. *Sind E, F normierte Raeume und T ein injektiver Operator von E nach F und $T^{-1} : TE \longrightarrow E$ sein inverser. Dann ist T abgeschlossen, genau dann wenn T^{-1} abgeschlossen ist.*

Beweis. Das ist klar, da die Graphen von T und T^{-1} durch Vertauschen der Komponenten auseinander hervorgehen. □

Bemerkung. Proposition zeigt die Flexibilitaet unseres Konzeptes von nur auf einem Teilraum definierten Operators: Es ist abgeschlossen unter Bildung von Inversen (bei Injektivitaet). Ebenso ist Abgeschlossenheit bewahrt bei Bildung des Inversen.

THEOREM. *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien E, F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F mit abgeschlossenem Definitionsbereich (z.B. $D(T) = E$). Ist T abgeschlossen, so ist T beschraenkt.*

Bemerkung.
- Wir werden den Satz hauptsaechlich auf die Inversen von surjektiven Operatoren anwenden (s.u.)
- Es gilt (offenbar) auch die Umkehrung: Ist T beschraenkt und $D(T)$ abgeschloessen, so ist T abgeschlossen. Das folgt mit demselben Beweis wie die obigen Proposition und wird auch unten noch einmal diskutiert.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $D(T) = E$. (Da E ein Banachraum ist, ist auch das abgeschlossene $D(T)$ ein Banachraum. Wir konnen uns auf $D(T)$ einschraenken). Nach Voraussetzung ist $G(T)$ als abgeschlossener Teilraum des Banachraum (!) $E \times F$ ebenfalls ein Banachraum. Betrachte nun (*Zeichnung*)

$$P : G(T) \longrightarrow E,\ P(x, Tx) = x,$$
$$Q : G(T) \longrightarrow F,\ Q(x, Tx) = y.$$

Dann gilt:

Es sind P, Q linear. klar.

P, Q sind stetig. (Nur P) $\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$.

Es ist P bijektiv. Injektiv: $0 = P(x, Tx) = x$. Dann $Tx = 0$, also $(x, Tx) = (0, 0)$.
Surjektiv: $x = P(x, Tx)$ fuer jedes $x \in E$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von der stetigen Inversen fuer P erfuellt und es ist P^{-1} stetig. Damit ist dann auch $QP^{-1} = T$ stetig. □

Ende der Vorlesung

Eine entscheidende Folgerung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen ist folgende.

FOLGERUNG. *Seien E, F Banachraeume und $T : D(T) \longrightarrow F$ bijektiv (d.h. surjektiv und injektiv auf $D(T)$). Ist T abgeschlossen, so ist T^{-1} stetig.*

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist auch T^{-1} abgeschlossen. Da T Surjektiv ist, gilt $D(T^{-1}) = F$. Damit folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen also die gewuenschte Stetigkeit. □

Bemerkung. Die Inverse eines bijektiven Operators ist also entweder 'von alleine stetig ist' (wenn naemlich der Operator abgeschlossen ist) oder gar nicht stetig ist (wenn der Operator nicht abgeschlossen ist). Daher laesst sich Theorie der Inversen in gewisser Weise sinnvoll nur fuer abgeschlossenen Operatoren entwickeln.

Der Satz und die vorangegangenen Propositionen lassen sich auch wie folgt zusammen fassen:

Proposition. *(Magisches Dreieck) Seien E, F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F. Dann gilt fuer die drei Eigenschaften*

- *T beschraenkt,*
- *T abgeschlossen,*
- *$D(T)$ abgeschlossen,*

dass je zwei dieser Eigenschaften die dritte implizieren. Insbesondere sind also je zwei der Eigenschaften aequivalent, wenn die dritte gilt.

Beweis. T beschraenkt und $D(T)$ abgeschlossen. Dann ist T abgeschlossen: Einfach $((x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Dann $x_n \to x$ also $((D(T)$ abg$)$, $x \in D(T)$, also $(T$ stetig$)$ $Tx = \lim Tx_n = y)$.

T beschraenkt, T abgeschlossen. Dann ist $D(T)$ abgeschlossen: Sei (x_n) Folge in $D(T)$ mit $x_n \to x$. Da T beschraenkt ist, ist (Tx_n) eine Cauchy Folge. Da F Banachraum ist, ist dann Tx_n konvergent gegen ein y. Damit konvergiert (x_n, Tx_n) gegen (x, y). Da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$ (und $Tx = y$).

$D(T)$ abgeschlossen und T abgeschlossen. Dann ist T beschraenkt. Satz vom abgeschlossenen Graphen. □

Wir sammeln noch einmal Informationen zum Inversen.

Folgerung. *Seien E, F Banachraeume und $T : D(T) \longrightarrow F$ bijektiv (d.h. surjektiv und injektiv auf $D(T)$). Dann sind aequivalent:*

(i) *T ist abgeschlossen.*
(ii) *T^{-1} ist abgeschlossen.*
(iii) *T^{-1} ist stetig.*
(iv) *Es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \geq c\|x\|$ fuer alle $x \in D(T)$.*

Bemerkung. Es ist nuetzlich sich klarzumachen, dass die untere Schranke in (iv) in der Tat nichts anderes besagt als eine obere Schranke an T^{-1} viz die Beschraenktheit von T^{-1}.

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (ii) haben wir schon vorher diskutiert. (Vertauschen der Koordinaten).

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Das folgt sofort aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, da aufgrund der Surjektivitaet $D(T^{-1}) = F$ abeschlossen.

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Da T^{-1} stetig ist, existiert ein $C \geq 0$ mit $\|T^{-1}y\| \leq C\|y\|$. Damit gilt also fuer $x \in D(T)$ und $y = Tx$

$$\|x\| = \|T^{-1}y\| \leq C\|y\| = C\|Tx\|.$$

(iv)$\Longrightarrow$ (i): Sei $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Da T surjektiv ist, existiert ein x^* mit $Tx^* = y$. Dann folgt also

$$\|y - Tx_n\| = \|Tx^* - Tx_n\| \geq c\|x_n - x^*\|.$$

Wegen $Tx_n \to y$ folgt also $x_n \to x^*$. Damit folgt $x = \lim x_n = x^* \in D(T)$ und $Tx = Tx^* = y$. □

Wir kommen nun zu einer wichtigen Klasse von Beispielen.

Beispiele. (Multiplikationsoperatoren auf ℓ^p.) Sei $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ gegeben und $p \in [1, \infty]$. Dann definiert man den maximalen Operator der Multiplikation mit u durch

$$D(M_u) := \{x \in \ell^p : ux \in \ell^p\}$$
$$M_u x = ux.$$

Offenbar ist dieser Operator diagonal. In diesem Sinne handelt es sich um einen besonders einfachen Operator.
Behauptung. (a) Fuer $p \in [1, \infty]$ ist M_u abgeschlossen.
(b) Fuer $1 \leq p < \infty$ ist $D(M_u)$ dicht. Fuer $p = \infty$ ist $D(M_u)$ genau dann dicht, wenn u beschraenkt ist (und dann ist $D(M_u) = \ell^\infty$).
Bew. (a) Sei $x_n \to x$ und $ux_n \to y \in \ell^p$. Dann konvergiert fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_n(k))$ gegen $x(k)$ und $u(k)x_n(k)$ gegen $y(k)$.
Damit folgt dann

$$y(k) = \lim u(k)x_n(k) = u(k) \lim x_n(k) = u(k)x(k)$$

fuer jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit gehoert dann $ux = y$ zu ℓ^p und es gilt $x \in D(M_u)$ mit $M_u x = y$.

(b) $1 \leq p < \infty$: klar (da $c_c \in D(M_u)$.
$p = \infty$: Ist $D(M_u)$ dicht, so existiert ein $x \in D(M_u)$ mit $\|x - 1\|_\infty \leq 1/2$, also $|x(k)| \geq 1/2$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|u\|_\infty \leq 2\|ux\|_\infty < \infty.$$

Unter Umstaenden hat man es mit Operatoren zu tun, die nicht abgeschlossen sind, aber abgeschlossene Fortsetzungen besitzen. Fuer diese Operatoren laesst sich eine entsprechenden Theorie entwickeln. Dabei spielt die kleinste abgeschlossene Fortsetzung eine besondere Rolle.

LEMMA. *Sei T ein linearer Operator vom normierten Raum E in den normierten Raum F. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es besitzt T eine abgeschlossene Fortsetzung.*
(ii) *Sind (x_n) in $D(T)$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y$, so folgt $y = 0$.*
(iii) *Es ist $\overline{G(T)}$ der Graph eines Operators.*

In diesem Fall existiert ein eindeutiger Operator $\overline{T}$ mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Dieser ist gegeben durch

$$D(\overline{T}) = \{x : \text{es existiert } (x_n) \subset D(T) \text{ mit } x_n \to x, Tx_n \to y\}, \overline{T}x = y.$$

Jede abgeschlossenen Fortsetzung von T auch eine Fortsetzung von $\overline{T}$

Ende der Vorlesung

Beweis. Erinnerung: Der Unterraum G ist der Graph eines Operator, wenn $(0, y) \in G$ nur fuer $y = 0$ erfuellt ist. $(*)$

(i)$\Longleftrightarrow$ (iii): Sei S eine abgeschlossene Fortsetzung von T. Dann ist $G(S)$ abgeschlossen mit $G(T) \subset G(S)$. Damit folgt (iii) leicht aus $(*)$. Die Umkehrung ist sowieso klar.

(iii)$\Longleftrightarrow$ (ii): Das ist klar nach Definition des Abschlusses und $(*)$.

Die letzten Aussage folgt nun leicht. $\square$

DEFINITION. *Ein Operator heisst abschliessbar, wenn er eine der Eigenschaften des Lemma erfuellt. Der Operator $\overline{T}$ mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ heisst dann der Abschluss von T.*

2. Stabilitaet von Abgeschlossenheit und Invertierbarkeit

Wir untersuchen wie Abgeschlossenheit und Invertierbarkeit unter kleinen Stoerungen erhalten bleiben.

DEFINITION. *Seien E, F normierte Raeume und S, T lineare Operatoren von E nach F. Der Operator S heisst T-beschraenkt, wenn gilt*

- $D(S) \supset D(T)$
- *es gibt $a, b \geq 0$ mit*

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$$

fuer alle $x \in D(T)$.

Das Infimum aller dieser b heisst die T-Schranke von S.

Bemerkung.

- Der Operator S ist T-beschraenkt, wenn $\|x\|_S \leq C\|x\|_T$ gilt.
- Ist $S \in L(E, F)$, so gilt fuer jeden Operator T, dass S T-beschraenkt mit Schranke 0 ist. (Denn $\|Sx\| \leq C\|x\| + 0\|Tx\|$.)

Fuer den naechsten Satz muessen wir die Summe von Operatoren von E nach F definieren. Sind T und S Operatoren von E nach F, so definiert man den Operator $T + S$ durch

$$D(T + S) := D(T) \cap D(S)$$

$$(T + S)x := Tx + Sx.$$

THEOREM. *(Stabilitaet der Abgeschlossenheit) Seien E, F Banachraeume und S, T lineare Operatoren von E nach F. Sei S T-beschraenkt mit T-Schranke kleiner als Eins. Dann ist $T + S$ mit $D(T + S) = D(T)$ genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.*

Beweis. Da S die T-Schranke kleiner als Eins hat, gibt es b mit $0 \leq b < 1$ und $a \geq 0$ mit

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$$

fuer alle $x \in D(T)$. Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ aequivalent sind. Es gilt fuer alle $x \in D(T)$ zweierlei:

Erstens:

$$\|Tx\| \leq \|(T + S)x\| + \|Sx\| \leq \|(T + S)x\| + a\|x\| + b\|Tx\|$$

also

$$(1 - b)\|Tx\| \leq a\|x\| + \|(T + S)x\|$$

also

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\| \leq C(\|x\| + \|(T + S)x\|) = C\|x\|_{T+S}.$$

Zweitens:

$$\begin{aligned} \|x\|_{T+S} &= \|x\| + \|(T+S)x\| \\ &\leq \|x\| + \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq (1+a)\|x\| + (1+b)\|Tx\| \\ &= D\|x\|_T. \end{aligned}$$

Damit sind die Normen $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ auf $D(T) = D(T+S)$ aequivalent. Es ist dann also $(D(T), \|\cdot\|_T)$ genau dann vollstaendig, wenn $(D(T+S), \|\cdot\|_{T+S})$ vollstaendig ist und die Aussage folgt aus der Charakterisierung der Vollstaendigkeit. □

Fuer den naechsten Satz muessen wir das Produkt TS von Operatoren definieren. Fuer Operatoren S von E nach F und T von F nach G definiert man den Operator TS von E nach G durch

$$D(TS) = \{x \in D(S) : Sx \in D(T)\},\ TSx = T(Sx).$$

Ist also T ein bijektiver Operatore von E nach F (d.h. $T : D(T) \longrightarrow F$ ist bijektiv) und S ein Operator von E nach F mit $D(S) \supset D(T)$, so ist der Operator ST^{-1} auf ganz F definiert (da fuer alle $y \in F$ $T^{-1}y \in D(T) \subset D(S)$ gilt).

Theorem. *(Stabilitaet der stetigen Invertierbarkeit) Seien E, F Banachraeume und S, T lineare Operatoren von E nach F. Es sei T abgeschlossen und bijektiv (also $T^{-1} \in L(F,E)$). Gilt $D(S) \supset D(T)$ und $\|ST^{-1}\| < 1$, so ist auch $T + S$ abgeschlossen und bijektiv und es gilt*

$$(T+S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n,$$

wobei die Reihe bzgl. der Norm in $L(E,F)$ (absolut) konvergiert.

Bemerkung. Formal folgt das leicht aus $(T+S) = (1+ST^{-1})T$ und Invertieren von $(1+ST^{-1})$ mittels geometrischer Reihe. Sind T, S tatsaechlich beschraenkt, so kann man die formale Rechnung im wesentlichen so durchfuehren. (Gute Uebung).

Beweis. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen:

$T + S$ ist abgeschlossen. Es gilt $D(S) \supset D(T)$. Fuer $x \in D(T)$ gilt weiterhin

$$\|Sx\| = \|ST^{-1}Tx\| \leq \|ST^{-1}\|\|Tx\|.$$

Wegen $\|ST^{-1}\| < 1$ ist S also T-beschraenkt mit Schranke kleiner als Eins. DAmit folgt aus dem vorigen Satz und der Abgeschlossenheit von T, dass $T + S$ abgeschlossen ist.

$T + S$ ist injektiv. Fuer $x \in D(T+S) = D(T)$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|(T+S)x\| &\geq \|Tx\| - \|Sx\| \\ &= \|Tx\| - \|ST^{-1}Tx\| \\ &\geq (1 - \|ST^{-1}\|)\|Tx\| > 0. \end{aligned}$$

(Hier folgt der letzte Schritt, da T injektiv ist und $\|ST^{-1}\| < 1$.)

$A := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k T^{-1}(ST^{-1})^k$ existiert in $L(F,E)$.

Sei $A_N := \sum_{k=0}^{N}(-1)^k T^{-1}(ST^{-1})^k$. Dann gilt fuer $m < n$

$$\begin{aligned} \|A_n - A_m\| &= \|\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k T^{-1}(ST^{-1})^k\| \\ &\le \|T^{-1}\|\|ST^{-1}\|^{m+1}\sum_{k=0}^{n-m-1}\|ST^{-1}\|^k \\ (q := \|ST^{-1}\|) \quad &\le \|T^{-1}\|q^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}q^k \\ &= q^{m+1}\frac{\|T^{-1}\|}{1-q}. \end{aligned}$$

Also ist (A_N) eine Cauchy Folge in dem Banachraum $L(Y,X)$. Daher existiert also $A = \lim A_N$.

Es gilt $(T+S)A = I$ *auf* E. *Insbesondere ist* $(T+S)$ *also surjektiv.* Es ist

$$(T+S)A_N = (T+S)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k T^{-1}(ST^{-1})^k$$

auf ganz F definiert. Es gilt (Teleskopsummme!)

$$\begin{aligned} (T+S)A_N &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k(T+S)T^{-1}(ST^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k(ST^{-1})^k + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k(ST^{-1})^{k+1} \\ (Teleskopsumme) \quad &= 1 + (-1)^N(ST^{-1}))^{N+1} \\ &\longrightarrow 1, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $\|ST^{-1}\| < 1$ folgt. Fuer jedes $y \in F$ gilt also

$$A_N y \to Ay \text{ und } (T+S)A_N y \to y.$$

Da $(T+S)$ abgeschlossen ist, folgt fuer jedes $y \in F$ also

$$Ay \in D(T+S) \text{ und } (T+S)Ay = y.$$

Damit gilt also

$$(T+S)A = 1.$$

Ende der Vorlesung

Die obigen Betrachtungen zeigen, dass $(T+S)$ injektiv und Surjektiv ist, also bijektiv und $(T+S)A = 1_F$ erfuellt mit dem steigen Operatore $A : F \longrightarrow E$. Dann gilt automatisch

$$A(T+S) = 1_{D(T+S)}.$$

(Denn: Sei $x \in D(T+S)$, $y = (T+S)x$ und $z := A(T+S)x = Ay$. Zu zeigen $z = x$. Da $T+S$ injektiv ist und sowohl x als auch $z = Ay$ zu $D(T+S)$ gehoeren, reicht es $(T+S)z = (T+S)x$ zu zeigen. Nach Konstruktion und dem schon gezeigten $(T+S)A = 1_F$ gilt

$$(T+S)z = (T+S)Ay = 1_F y = y = (T+S)x.$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. *(Neumannsche Reihe) Seien E ein Banachraum und $S \in L(E,E)$ mit $\|S\| < 1$. Dann ist $1 - S$ invertierbar und es gilt*

$$(1 - S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k.$$

Beweis. Setze $T = 1$ und $S = S$ im vorigen Satz. □

Bemerkung. Es ist eine gute Uebung direkt zu zeigen, dass $A = \lim_N \sum_{k=0}^{N} S^k$ existiert und $(1 - S)A = A(1 - S) = 1$ erfuellt, falls $\limsup_N \|S^N\|^{1/N} < 1$.

KAPITEL 10

Grundlegende Spektraltheorie

Fuer abgeschlossene Operatoren entwickeln wir eine Loesungstheorie fuer Gleichungen der Form

$$(T - z)x = y$$

bei gegebenem y, T, z. Wir wollen

- Loesbarkeit der Gleichung fuer alle y (d.h. Surjektivitaet von $T-z$).
- Eindeutigkeit der Loesung (d.h. Injektivitaet von $T - z$).
- Stetige Abhaengigkeit der Loesung x von y. (d.h. Stetigkeit von $(T - z)^{-1}$.
- Stetige Abhaengigkeit von z.

Entsprechende Betrachtungen sind als Spektraltheorie bekannt. Im Falle von Operatoren in endlichdimensionalen Raeumen (Matrizen) geht es gerade um Eigenwerte.

Definition. *Sei E ein normierter Raum und T ein linearer Operator von E nach E. Dann definiert man die Resolventenmenge $\rho(T)$ von T als*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I : D(T) \longrightarrow E \text{ bijektiv mit stetiger Inverser}\}.$$

Das Komplement $\mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heisst Spektrum von T und wird mit $\sigma(T)$ bezeichnet. Die Abbildung

$$R = R_T : \rho(T) \longrightarrow L(E), \lambda \mapsto R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$$

heisst die Resolvente von T.

Notation. Wir schreiben auch $T - \lambda$ statt $T - \lambda I$. Oft wird auch die Resolventenmenge als Resolvente bezeichnet.
Bemerkung.

- Der Operator bildet E in sich selber ab.
- Ist T nicht abgeschlossen, so ist $\rho(T) = \emptyset$. Die eingefuehrten Begriffe sind also nur fuer abgeschlossene Operatoren interessant.
  Bew. *Fall 1.* $T - \lambda$ nicht bijektiv: klar.
  Fall 2. $T - \lambda$ bijektiv. Dann ist $(T - \lambda)^{-1}$ auf ganz E definiert und nicht stetig. (Denn sonst waere $(T - \lambda)^{-1}$ abgeschlossen und damit auch $T - \lambda$ abgeschlossen und damit T abgeschlossen.)
- Ist E ein Banachraum, so folgt aus der Abgeschlossenheit von T automatisch die Stetigkeit von $(T - \lambda)^{-1}$.

Wir werden es im folgenden daher (fast) ausschliessich mit abgeschlossenen Operatoren in Banachraeumen zu tun haben.

Beispiel - Matrizen. Sei $X = \mathbb{K}^n$ und A eine lineare Abbildung von E nach E. In diesem Falle sind alle linearen Operatoren stetig. Daher gilt

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda : A - \lambda \text{ nicht bijektiv}\}\\ &= \{\lambda : \det(A-\lambda) = 0\}\\ &= \{\lambda : A - \lambda \text{ nicht injektiv}\}\\ &= \{\text{Eigenwerte von } A\}.\end{aligned}$$

Beispiel mit leerem Spektrum ueber $\mathbb{C}$: (s.u.)

Grundlegende Eigenschaften von Spektrum und Resolvente liefert der folgende Satz. Er besagt, dass die Resolventenmenge eine schoene Menge ist und die Resolvente eine schoene Funktion.

THEOREM. *(Grundlegende Eigenschaften von Resolvente u Spektrum) Sei E ein Banachraum und T ein Operator von E nach E. Dann ist $\rho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$ und $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}$. Die Resolvente*

$$R : \rho \longrightarrow L(E), \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}$$

ist analytisch (d.h. um jeden Punkt in eine Normkonvergente Potenzreihe entwickelbar) und insbesondere stetig.

Beweis. Sei $z_0 \in \rho(T)$. Dann ist $(T - z_0)$ invertierbar. Damit ist dann nach dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch

$$T - z = (T - z_0) + (z_0 - z) =' T + S'$$

invertierbar falls

$$1 > \|(z - z_0)(T - z_0)^{-1}\| = |z - z_0|\|(T - z_0)^{-1}\|$$

also

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(T - z_0)^{-1}\|}.$$

Das zeigt die Offenheit der Resolventenmenge. Weiterhin folgt aus dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch noch dass

$$\begin{aligned}(T-z)^{-1} &= ((T - z_0) + (z_0 - z))^{-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(T - z_0)^{-1}((z - z_0)(T - z_0)^{-1})^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n(T - z_0)^{-n-1}\end{aligned}$$

mit einer (absolut) normkonvergenten Potenzreihe. Damit folgt die Analytizitaet.

Zum 'Insbesondere': Es gilt allgemein, dass eine analytische Funktion stetig ist. Konkret

$$(T - z)^{-1} - (T - z_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(z - z_0)^n(T - z_0)^{-n-1}$$

normkonvergent, also

$$\| \ldots \| \leq |z - z_0| \|(T - z_0)^{-2}\| \sum_{k=0}^{\infty} \|((z - z_0)(T - z_0)^{-1}\|^k \leq |z - z_0| C$$

fuer z nahe z_0 (da dann $\|((z - z_0)(T - z_0))\| \leq q < 1$ gleichmaessig). $\square$

Evtl. etwas zu resuduallem Spektrum etc....
Die bisherigen Betrachtungen galten fuer abgeschlossene Operatoren. Wir kommen nun zu beschraenkten Operatoren. Dort laesst sich mehr ueber das Spektrum sagen und insbesondere seine Lage genauer bestimmen. Wir beginnen mit einem Lemma, das gar nichts mit Operatoren zu tun hat.

LEMMA. *(Konvergenz submultiplikativer Folgen) Sei (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$ mit $a_{n+m} \leq a_n a_m$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\lim_n a_n^{1/n}$ und es gilt*

$$\lim_n a_n^{1/n} = \inf a_n^{1/n}.$$

Beweis. Sei $\alpha := \inf a_n^{1/n}$. Dann gilt offenbar $\liminf a_n^{1/n} \geq \alpha$. Es bleibt also

$$\limsup a_n^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$$

fuer $\varepsilon > 0$ beliebig zu zeigen. Waehle N mit $a_N^{1/N} < \alpha + \varepsilon$. Dann laesst sich jedes n eindeutig darstellen als $n = Nk + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq N - 1$. Es folgt

$$a_n = a_{Nk+r} \leq a_N^k a_r$$

also

$$a_n^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} = a_N^{k/n} (a_r)^{1/n} \leq a_N^{k/n} C^{1/n}$$

mit $C := \max\{a_r : r = 0, \ldots, N - 1\}$. Es gilt dann $k/n \to 1/N$ fuer $n \to \infty$ und $C^{1/n} \to 1$. Damit folgt die Aussage. $\square$

Ist T ein beschraenkter Operator in einem normierten Raum, so kann man das vorige Lemma mit $a_n := \|T^n\|$ anwenden. (Denn: $a_{n+m} = \|T^{n+m}\| = \|T^n T^m\| \leq \|T^n\| \|T^m\| = a_n a_m$.)

Ende der Vorlesung.

Exkurs Funktionentheorie

Ende der Vorlesung

DEFINITION. *(Spektralradius) Sei E ein normierter Raum und $T \in L(E)$. Dann definiert man den Spektralradius $r(T)$ als*

$$r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Beachte. Es ist $r(T) \leq \|T\|$ und $r(T) < \|T\|$ ist (leicht) moeglich z.b. auf $\mathbb{K}^2$ mit $T = (1/2 \;\; a, 0 \;\; 1/2)$. Dann ist $\|T\| \geq |a|$. Aber es gilt $T^n = (1/2^n \;\; \frac{an}{2^n}, 0 \;\; 1/2^n)$. Damit folgt

$$\|T^n\| \leq \frac{1}{2^n}(2 + |a|^2 n^2)^{1/2}$$

also

$$r(T) \leq 1/2.$$

(Hier wird verwendet, dass fuer den durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschriebenen Operator auf $\mathbb{K}^N$ mit der Euklidischen Norm gilt:

$$\|A\| \leq \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

(Uebung)

Theorem. *(Spektrum fuer beschraenkte Operatoren) Sei E ein Banachraum ueber $\mathbb{C}$ und $T \in L(E)$. Dann gilt*

$$\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r(T).$$

Insbesondere ist $\sigma(T)$ nichtleer und in $B_{r(T)}$ enthalten. Weiterhin ist

$$(T - z)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n \ \ (NeumannscheReihe)$$

normkonvergent in $\mathbb{C} \setminus B_{r(T)}$.

Zeichnung. $\sigma(T)$ ist kompakt, Teilmenge von $B_{r(T)}$ und schneidet den Rand dieser Kugel. Ausserhalb dieser Kugel laesst es sich in Potenzreihe entwickeln.

Beweis. Sei $r := r(T)$.

Fuer $z \notin B_r$ gilt $z \in \rho(T)$ und die angebenen Formel der Neumannschen Reihe. Idee:

$$(T - z) = -z + T = -z(1 - \frac{1}{z}T) = -z \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{T}{z})^n$$

absolut konvergent fuer genuegend grosse z. Hier sind die Details: Fuer $|z| > r$ ist

$$\limsup_n \|(\frac{1}{z}T)^n)\|^{1/n} = \frac{1}{|z|} r < 1$$

also ist nach dem Wurzelkriterium (laesst sich genauso beweisen wie fuer $\mathbb{C}$)

$$-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n$$

absolut konvergent also normkonvergent (da $L(E)$ Banachraum). Fuer den Grenzwert

$$A = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n = \lim_N -\sum_{n=0}^{N} z^{-n-1} T^n = \lim_N A_N$$

gilt dann (Nachrechnen, Teleskopsumme)

$$A(T - z) = \lim_N A_N(T - z) = \lim_N (T - z) A_N = (T - z)A = 1.$$

Damit folgt $\sigma(T) \subset B_r$ und die Aussage ueber die Potenzreihenentwicklung der Resolvente ausserhalb von B_r.

$\sigma(T) \neq \emptyset$: Idee: Satz von Liouville! Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$, also $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $R = R_T$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Dann ist fuer jedes $\varphi \in L(E)'$ die Funktion

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(R(z))$$

analytisch. Weiterhin gilt nach dem schon bewiesenen fuer $|z| > r$

$$\phi(z) = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \varphi(T^n).$$

Das impliziert

$$|\phi(z)| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi\| \frac{\|T^n\|}{|z|^n} \leq \frac{1}{|z|} \|\varphi\| \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{|z|} 2\|\varphi\|.$$

fuer $|z| > 2\|T\|$. Das liefert

$$|\phi(z)| \to 0, |z| \to \infty.$$

Nach dem Satz von Liouville folgt also $\phi \equiv 0$. Da φ beliebig war folgt aus Hahn-Banach dann $R \equiv 0$. Widerspruch da $R(z)$ immer injektiv ist.

$\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r$: Sei $r_0 := \max\{|z| : z \in \sigma(T)\}$. (Das Maximum existiert, da $\sigma(T)$ abgeschlossen und nach dem schon bewiesenen nichtleer und beschraenkt also kompakt ist). Nach dem schon bewiesenen gilt $r_0 \leq r$. Idee: R ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus B_{r_0}$ und in $\mathbb{C} \setminus B_r$ durch die Potenzreihe $-\sum \frac{1}{z^{n+1}} T^n$ gegeben. Da Potenzreihen 'maximal' existieren, muss $r = r_0$ sein.

Wir waehlen wieder $\varphi \in L(E)'$ und betrachten

$$\phi : \rho(T) \longrightarrow \mathbb{C}, \phi(z) = \varphi(R(z)).$$

Dann ist ϕ analytisch in $\rho(T) \supset \mathbb{C} \setminus B_{r_0}$. Insbesondere ist also das Kurvenintegral

$$\int_{|z|=s} z^m \phi(z) dz \qquad (I)$$

unabhaengig von $s > r_0$.

Fuer $s > r$ koennen wir (I) mittels der schon bewiesenen Potenzreiche leicht berechnen zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=s} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} \varphi(T^n) dz \\ (glm\ konvergent) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=s} z^{m-n-1} dz \right) \varphi(T^n) \\ &= -2\pi i \varphi(T^m). \end{aligned}$$

Fuer $s > r_0$ koennen wir das Integral ausserdem auch abschaetzen:

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2\pi s s^m \sup_{|z|=s} |\phi(z)| \\ &\leq 2\pi s^{m+1} \|\varphi\| \sup_{|z|=s} \|R(z)\| \\ &= 2\pi C_s \|\varphi\| s^{m+1} \end{aligned}$$

mit $C_s := \sup_{|z|=s} \|R(z)\|$.

Fasst man das zusammen, so ergibt sich

$$|\varphi(T^m)| = \frac{|I|}{2\pi} \leq C_s s^{m+1} \|\varphi\|.$$

Da φ beliebig war, folgt aus dem Satz von Hahn-Banach also

$$\|T^m\| \leq C_s s^{m+1}.$$

Bilden des lim sup und der m-ten Wurzel liefert fuer festes $s > r_0$ also

$$r(T) = \limsup \|T^m\|^{1/m} \leq \limsup C_s^{1/m} s^{(m+1)/m} = s.$$

Da $s > r_0$ beliebig war, folgt

$$r \leq r_0.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen.

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so kann das Spektrum natuerlich leer sein. Betrachte zum Beispiel $E = \mathbb{R}^2$ und T eine 'Drehung um die z-Achse um 90?', d.h. $T = (0-1, 10)$. Dann hat T keinen reellen Eigenwert.
- Der Beweis des nichtleeren Spektrums nutzt Funktionentheorie. Tatsaechlich wird fuer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dazu schon im endlichdimensionalen Fall Funktionentheorie verwendet, wenn man verwendet, dass ein Polynom eine Nullstelle hat.
- Fuer unbeschraenkte Operatoren kann das Spektrum auch ueber $\mathbb{C}$ leer sein: Sei $EC([0,1])$ und

$$D(T) = \{f \in C([0,1]) : \text{es existiert } g \in C([0,1]) \text{ mit } f(t) = \textstyle\int_0^t g(s)ds\}$$

$$Tf = g.$$

  Es ist also $Tf = f'$ und man kann die Theorie der gewoehnlichen Differentialgleichungen nutzen um $(T-z)f = h$ zu loesen. Das fuehrt auf

$$\begin{aligned} (T-z)^{-1}h(x) &= e^{zx}\int_0^x e^{-zt}h(t)dt \\ &= \int_0^x (h(t) + ze^{zt}\int_0^t e^{-zs}h(s)ds)dt \end{aligned}$$

  Beweis: (Skizze) Die Gueltigkeit der zweiten Gleichung folgt einfach durch Partielles Integrieren. Die rechte Seite ist offenbar ein linearer Operator von h. Anwenden von $(T-z)$ auf die rechte Seite unter Ausnutzen der beiden Darstellungen liefert leicht die Aussage.

Beispiel - Multiplikationsoperator. Sei $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ beliebig. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und M_u der maximale Operator der Multiplikation mit u auf ℓ^p (s.o.). Dann gilt

- $\sigma(M_u) = \overline{\{u(k) : k \in \mathbb{N}\}}$.
- $\rho(M_u) = \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(k) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer alle } k \in \mathbb{N}\}$.
- $(M_u - z)^{-1} = M_{\frac{1}{u-z}}$ fuer alle $z \in \rho(M_u)$.

Bemerkung.

- Multiplikationsoperatoren sind diagonal. Die δ_n sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten $u(n)$.
- Das Spektrum kann aber echt groesser sein, da es der Abschluss dieser Menge ist.
- Jede abgeschlossene Menge in $\mathbb{K}$ kann Spektrum (eines Multiplikationsoperator) sein. (Uebung...)

Bew. Sei

$$\rho' := \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(k) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen $\rho' = \rho$:
Fuer $z \in \rho'$ ist $g := \frac{1}{u-z}$ eine beschraenkte Funktion und es gilt offenbar

$$(M_u - z)M_g = I, \;\; M_g(M_u - z) = I_{D(M_u)}.$$

Es ist also $z \in \rho(T)$ und die angegebene Formel fuer die Inverse von $(M_u - z)$ gilt.
Fuer $z \notin \rho'$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε mit $|u(n_\varepsilon) - z| \leq \varepsilon$. Waere nun $(M_u - z)$ invertierbar mit stetiger Inverser T so haette man

$$1 = \|\delta_{n_\varepsilon}\| = \|T(M_u - z)\delta_{n_\varepsilon}\| \leq \|T\|\|(M_u - z)\delta_{n_\varepsilon}\| \leq \varepsilon\|T\|.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war ergibt sich ein Widerspruch.

Wir kommen nun noch zu wichtigen algebraischen Umformungen.

Proposition. *(Resolventenformeln -abstrakt) Seien E, F normierte Raeume und S, T bijektive lineare Operatoren von E nach F.*
(a) Ist $D(S) \subset D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$.
(b) Ist $D(S) = D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1} = S^{-1}(S - T)T^{-1}$.

Bemerkung.

- Formal ist das ganz klar
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x}(y - x)\frac{1}{y}.$$
Es geht darum, ob die angegebenen Ausdruecke definiert sind.
- Ist $T = S + P$ mit invertierbaren T, S mit gleichem Definitionsbereich, so folgt also
$$T^{-1}PS^{-1} = S^{-1}PT^{-1}.$$

Ende der Vorlesung

Beweis. Es reicht (a) zu zeigen. Sei $y \in F$ beliebig und $x = S^{-1}y \in D(S) \subset D(T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T^{-1}y - S^{-1}y &= T^{-1}(SS^{-1}y) - T^{-1}TS^{-1}y \\ &= T^{-1}Sx - T^{-1}Tx \\ &= T^{-1}(Sx - Tx) \\ &= T^{-1}(S - T)x \\ &= T^{-1}(S - T)S^{-1}y. \end{aligned}$$

□

Theorem. *(Resolventenformeln) Seien S, T lineare Operatoren auf dem mormiereten Raum E.*
(a) Fuer $z, z' \in \rho(T)$ gilt die erste Resolventengleichung

$$R_T(z) - R_T(z') = (z - z')R_T(z)R_T(z') = (z - z')R_T(z')R_T(z).$$

(b) Ist $D(S) = D(T)$ so gilt fuer $z \in \rho(S) \cap \rho(T)$ die zweite Resolventengleichung

$$R_T(z) - R_S(z) = R_T(z)(S - T)R_S(z) = R_S(z)(S - T)R_T(z).$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition.
(a) $T - z$, $T - z'$ statt T, S.
(b) $T - s$, $S - z$ statt T, S. $\square$

KAPITEL 11

Etwas zu adjungierten Operatoren

In diesem Abschnitt lernen wir die adjungierten Operatoren kennen. Die Grundidee ist dass gilt

$$(\varphi, Tx) = (T^*\varphi, x)$$

fuer alle x aus dem Raum und φ aus dem Dualraum. Diese Konzepte koennen in allgemeinen topologischen Vektorraeumen definiert werden. Wir beschraenken uns aber auf Banachraeume.

1. Adjungierte Operatoren in Banachraeumen

Wir beginnen mit etwas Notation. Ist E ein topologischer Vektorraum mit Dualraum $E^{'}$, so bezeichnen wir die Auswerten eines $\varphi \in E^{'}$ an der Stelle $x \in E$ mit (φ, x) d.h.

$$(\varphi, x) := \varphi(x).$$

Seien E und F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F (d.h. es gibt einen Unterraum $D = D(T)$ von E, der durch T linear nach F abgebildet wird). Ein linearer Operator S von $F^{'}$ nach $E^{'}$ heisst formal zu T adjungiert, wenn gilt

$$(S\varphi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in D(S) \subset F^{'}$ und $x \in D(T)$. (Zeichnung.) Dann ist

$$S\varphi|_D = \varphi \circ T : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit eindeutig stetig auf $\overline{D}$ fortsetzbar. Diese Fortsetzung wird mit $\overline{\varphi \circ T}$ bezeichnet. Ist T dicht definiert (d.h. $D = D(T)$ dicht in E), so ist also $\psi := S\varphi$ durch φ (und T) eindeutig bestimmt, in dem Sinne, dass es hoechstens ein ψ mit der Eigenschaft

$$(\psi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $x \in D$ gibt. Sei nun T dicht definiert. Dann definiert man den Operator T^* durch

$$D(T^*) := \{\varphi \in F^{'} : D \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \varphi(Tx) \;\; \textit{stetig}\}$$

$$T^*\varphi := \overline{\varphi \circ T}.$$

Alternativ kann man auch schreiben

$$D(T^*) := \{\varphi \in F^{'} : \exists \psi \in E^{'} : (\psi, x) = (\varphi, Tx) \text{fuer alle } x \in E\},$$

$$T^*\varphi := \psi.$$

Dann ist T^* ein linearer Operator von $F^{'}$ nach $E^{'}$ (leicht...) Nach Konstruktion gilt

- T^* ist zu T formal adjungiert d.h. $(\varphi, Tx) = (T^*\varphi, x)$ fuer alle $x \in D$ und $\varphi \in D(T^*)$.

- Ist S zu T formal adjungiert so ist S eine Einschraenkung von T^*.

Es ist also T^* der maximale zu T adjungierte Operator. Wir werden ihn im folgenden nur als d e n adjungierten Operator bezeichnen. Ist S eine Einschraenkung von T so schreiben wir auch $S \subset T$. Damit gilt insbesondere:

PROPOSITION. *(Charakterisierung adjungierter Operator) Seien E, F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F, der dicht definiert ist. Dann ist der Operator S von $F^{'}$ nach $E^{'}$ genau dann der adjungierte von T, wenn gilt*

- *S ist zu T formal adjungiert. ($\Longleftrightarrow S \subset T^*$)*
- *$D(T^*) \subset D(S)$.*

Hat man es mit beschraenkten Operatoren zu tun, so braucht man sich keine Sorgen zu machen ;-)

THEOREM. *Sind E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann gehoert T^* zu $L(F^{'}, E^{'})$ und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$. In diesem Fall ist T^* der einzige zu T formal adjungierte auf ganz $F^{'}$ definierte Operator.*

Beweis. Wir berechnen T^*: Es ist

$$\varphi \circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

fuer alle $\varphi \in F^{'}$ stetig. Also gilt

$$(\varphi \circ T, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in F^{'}$ und $x \in E$. Damit folgt

$$D(T^*) = F^{'}, \;\; T^*\varphi = \varphi \circ T.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup \|T^*\varphi\| : \varphi \in F^{'}, \|\varphi\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi \circ T(x)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|(\varphi, Tx)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1\} \\ (Hahn - Banach) \quad &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Damit ist T^* stetig mit $\|T^*\| = \|T\|$. □

Beispiel. (Matrizen) Sei $A : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^M$ linear gegeben durch die Matrix (a_{ij}) bzgl. Basen e_i und d_j. Dann ist der adjungierte Operator bzgl. der dualen Basen gegeben durch die Matrix a^* mit $a^*(i, j) = a(j, i)$.
(Bew. Uebung, Nachrechnen).

Beispiel - Multiplikationsoperatoren in ℓ^p. Sei $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Sei $M_p(t)$ der maximale Operator der Multiplikation mit t d.h.

$$D(M_p(t) = \{g \in \ell^p : tg \in \ell^p\}.$$

$$M_p(t)g = tg.$$

Dann gilt $M_p(t) = M_q(t)$.

Ende der Vorlesung

Beweis. Es ist $M_q(t)$ formal zu $M_p(t)$ adjungiert: Fuer $f \in D(M_p(t))$ und $g \in D(M_p(t))$ gilt

$$(f, M_p tg) = \int f(tg) d\mu = \int (tf) g d\mu = (M_q(t) f, g).$$

Noch z.z. $D(M_p(t)^*) \subset D(M_q(t)$: Sei $f \in D(M_p(t)^*) \subset L^q$. Dann ist also

$$g \mapsto (f, M_p(t) g) = \int tfg d\mu$$

stetig auf $D(M_p(t)$. Daher existiert ein $C \geq 0$ mit

$$(*) \ \ |\int (tf) g d\mu| \leq C \|g\|_p$$

fuer alle $g \in D(M_p(t))$. Gilt $D(M_p(t)) = \ell^p$, so sind wir nun fertig (nach dem Dualitaetssatz). Fuer den allgemeinen Fall muessen wir nun noch eine Approximation durchfuehren: Sei

$$X_N := \{x \in X : |t(x)| \leq N\}.$$

Dann gilt (offenbar)

$$(**) \quad \cup_N \{1_{X_n} g : g \in \ell^p\} \subset D(M_p(t).$$

Mit $(*)$ und $(**)$ folgt, dass

$$\ell^p(X_N, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}, g \mapsto int(tf) g d\mu$$

durch C beschraenkt ist. Daher gilt (Dualitaetssatz)

$$tf 1_{X_N} \in L^q \ \ mit \ \ \|tf 1_{X_N}|_q \leq C^q.$$

Fuer $N \to \infty$ folgt

$$\int |tf|^q d\mu \leq C^q$$

und damit $f \in D(M_q(t))$. □

Fuer die folgende Charakterisierung fuehren wir noch etwas Notation ein: Ist V ein Unterraum eines normierten Raumes H so definieren wir den Annihilator von V als

$$V^\perp := \{\varphi \in H' : (\varphi, v) = 0 \ \text{ fuer alle } v \in V\}.$$

Beachte, dass $V^\perp$ davon abhaengt, welcher umgebenden Raum H gewaehlt ist, d.h. $V^\perp = V_H^\perp$. Ausserdem erinnern wir an die kanonische Identifikation von $(E \times F)'$ mit $E' \times F'$.

Proposition. *Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F. Dann ist der Graph von T^* gegeben durch*

$$G(T^*) = \{(\varphi, \psi) \in F' \times E' : (\psi, x) - (\varphi, Tx) = 0 \textit{ fuer alle } x \in D(T)\} = (JG(T))^\perp$$

mit $J(x, y) = (-y, x)$. Weiterhin gilt

$$Ker(T^*) = \{\varphi \in F' : \varphi(y) = y \textit{ fuer alle } y \in R(T)\} = R(T)^\perp.$$

Insbesondere ist $R(T)$ dicht genau dann, wenn T^* injektiv ist.

Beweis. Zum Graphen von T^*: Die erste Gleichheit folgt einfach. Die zweite Gleichheit folgt direkt (nach Identifizieren von $(E \times F)^{'}$ mit $E^{'} \times F^{'}$.

Zur Aussage ueber den Kern: Nach dem schon bewiesenen ueber den Graphen von T^* gilt

$Ker(T^*) = \{\varphi \in F^{'} : (\varphi, 0) \in G(T^*)\} = \{\varphi : (\varphi, Tx) = 0 \text{fuer alle } x \in D(T)\}.$

Das liefert die Aussage.

Das 'Insbesondere' ist nun klar. □

FOLGERUNG. *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F. Dann ist der Graph von T^* gegeben durch

$$G(T^*) = \{(\varphi, \psi) \in F^{'} \times E^{'} : (\psi, x) - (\varphi, Tx) = 0 \text{ fuer alle } x \in D(T)\}.$$

Das ist eine abgeschlossene Menge. □

FOLGERUNG. *Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F. Sind T und T^* injektiv, so gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Beweis. Da T^* injektiv ist, ist $R(T)$ dicht. Also ist T^{-1} dicht definiert und $(T^{-1})^*$ existiert.

$(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*$: Sei $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$. Dann gilt

$$\psi = T^* \varphi$$

mit $\varphi \in D(T^*)$ geeignet. Damit folgt fuer alle $y = Tx \in R(T)$ dann

$$(\psi, T^{-1} y) = (\psi, x) = (T^* \varphi, x) = (\varphi, Tx) = (\varphi, y).$$

Damit folgt $\psi \in D((T^{-1})^*)$ mit $(T^{-1})^* \psi = \varphi$.

$D((T^{-1})^*) \subset D((T^*)^{-1})$. Sei $\psi \in D((T^{-1})^*$. Zu zeigen: $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$.

Sei $\varphi := (T^{-1})^* \psi = \overline{\psi \circ T^{-1}}$. (Wenn unsere Zielaussage ueberhaupt muss dies das richtige φ sein.) Dann gilt:

$$\psi = \overline{\psi \circ T^{-1} \circ T} = \overline{\varphi \circ T} = T^* \varphi \in R(T^*).$$

Das beendet den Beweis. □

Wir beenden den Abschnitt mit einigen Regeln zum Rechnen mit adjungierten Operatoren.

PROPOSITION. *Gilt $S \subset T$ so folgt $T^* \subset S^*$.*

Beweis. Das ist einfach. (Sei $\varphi \in D(T^*)$. Dann gilt

$$(\varphi, Sx) = (\varphi, Tx) = (T^* \varphi, x)$$

fuer alle $x \in D(S)$ und damit $\varphi \in D(S^*)$ und $S^* \varphi = T^* \varphi$.) □

PROPOSITION. *Seien S, T Operatoren zwischen Banachraeumen (so dass die folgenden Operatoren definiert sind).*

(a) Ist $S + T$ dicht definiert, so gilt

$$(S + T)^* \supset S^* + T^*.$$

(b) Ist ST dicht definiert , so gilt $(ST)^* \supset T^* S^*$.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in D(S^* + T^*) = D(S^*) \cap D(T^*)$. Dann ist die Abbildung

$$D(S+T) = D(S) \cap D(T) \longrightarrow \mathbb{K}, xmapsto(\varphi, (T+S)x)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, (T+S)x) = (\varphi, Tx) + (\varphi, Sx) = (T^*\varphi, x) + (S^*\varphi, x) = (T^*\varphi + S^*\varphi, x).$$

Damit ist diese Abbildung stetig und des gilt $\varphi \in D((S+T)^*)$ sowie $(T+S)^*\varphi = T^*\varphi + S^*\varphi$.

(b) Sei $\varphi \in D(T^*S^*) = \{\varphi \in D(S^*) : S^*\varphi \in D(T^*)\}$. Dann ist die Abbildung

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\} \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, STx)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, STx) = (S^*\varphi, Tx) = (T^*(S^*\varphi), x).$$

Damit ist die Abbildung stetig und es gilt $\varphi \in D((ST)^*)$ und $(ST)^*\varphi = T^*(S^*\varphi)$. □

FOLGERUNG. *Fuer beschraenkte Operatoren S, T gilt*

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$

und

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition, da die 'kleineren' Operatoren ueberall definiert sind. □

2. Adjungierte Operatoren in Hilbertraeumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir adjungierte Operatoren im Hilbertraum. In diesem Fall koennen wir nach dem Rieszschen Darstellungssatz den Dualraum mit dem Hilbertraum selber identifizieren. Entpsrechend ist der Hilbertraum adjungierte Operator, dann eine Abbildung zwischen den Usprungshilbertraeumen (in der anderen Richtung). Da die Identifikation eines Hilbertraumes mit seinem Dualraum ANTIlinear ist, treten im vergleich zu den Betrachtungen des vorigen Abschnittes an manchen Stellen zusaetzliche Konjugationen auf. Ansonsten geht alles wie gehabt. Im Falle von Hilberraeumem verwendet man ueblicherweise den Hilbertraum Adjungierten.

Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Sei T ein dicht definierte Operator von H_1 nach H_2. Dann ist der Hilbertraum-adjungiert T^* definiert durch

$$D(T^*) := \{y \in H_2 : \exists x^* \in H_1 \; s.d. \; \langle x^*, x\rangle_1 = \langle y, Tx\rangle_2 \text{for all } x \in H_1\}.$$

$$T^*y = x^*.$$

Erinnerung: Sind H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, so ist auch $H_1 \times H_2$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle (u,v), (r,s)\rangle := \langle u, r\rangle_1 + \langle v, s\rangle_2.$$

(Nachrechnen!). Wir werden weiterhin verschiedentlich folgende einfache Beobachtung verwenden.

Damit koennen wir nun den adjungierten Operator charakterisieren (vgl. allgemeine Satz oben).

THEOREM. *(Char. adjungierter Operator) Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann gilt*

$$G(T^*) = (UG(T))^\perp = U(G(T)\perp)$$

mit $U(x,y) = (y,-x)$. Insbesondere gilt

$$N(T^*) = R(T)^\perp.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G(T^*) &= \{(y,x) \in H_2 \times H_1 : \langle y, Tz\rangle_2 = \langle x, z\rangle_1 \text{ fuer alle } (z,Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y,x) \in H_2 \times H_1 : \langle (y,x), (Tz,z)\rangle = 0 \text{ fuer alle } (z,Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y,x) \in H_2 \times H_2 : (y,x) \perp UG(T)\} \\ &= (UG(T))^\perp. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun $(UG(T))^\perp = U(G(T)^\perp)$. (Dabei wird benutzt, dass $U^* = -U$ und $U^*U = -I$...) Das 'Insbesondere' folgt sofort aus dem ersten Teil: Denn $T^*x = 0$ gilt genau, dann wenn

$$\langle (x,0) \perp UG(T),$$

also

$$\langle x, Tz\rangle = 0$$

fuer alle $z \in D(T)$. □

THEOREM. *(Injektivitaet von T^*). Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Ist T injektiv mit dichtem Bild, so ist T^* injektiv und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^-)^*$.*

Beweis. Da $R(T)$ dicht ist, folgt (aus dem vorigen Satz) $N(T^*) = R(T)^\perp = \{0\}$ und T^* ist injektiv. Sei

$$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1, (x,y) \mapsto (y,x).$$

Dann gilt also $G(T^{-1}) = VG(T)$. Sei U wie im vorigen Satz. Dann gilt (Nachrechnen) $U^{-1}V = V^{-1}U$ und es folgt mit dem vorigen Satz (angewendet auf T^{-1}):

$$\begin{aligned} G(T^{-1})^*) &= U^{-1}(G(T^{-1})^\perp) \\ &= U^{-1}(VG(T)^\perp) \\ (!) \quad &= U^{-1}VG(T)^\perp \\ &= V^{-1}UG(T)^\perp \\ (vor.Satz) \quad &= V^{-1}G(T^*) \\ &= G(T^*)^{-1}). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM. *Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann ist T genau dann abschliessbar, wenn T^* dicht definiert ist. In diesem Fall gilt $T^{**} = \overline{T}$.*

Beweis. Ist T^* dicht definiert, so existiert T^{**}, ist abgeschlossen als adjungierter und eine Fortsetzung von T. Insbesondere gilt dann $\overline{T} \subset T^{**}$.

Sei T abschliesbar. Sei $x \in D(T^*)^{\perp}$. Dann gilt natuerlich $(x, 0) \perp G(T^*)$. Damit folgt aus dem vorvorigen Satz

$$(0, x) \in U^{-1}G(T^*)^{\perp} = U^{-1}(UG(T))^{\perp\perp} = U^{-1}U\overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

(Hier: Erste Gleicheit wegen $(x, 0) \perp G(T^*)$ und Def von U, zweite Gleichheit nach vorvorigem Satz, dritte gleichheit nach ueblicherm Schluss.) Damit folgt $x = 0$ (da Graph!).

Zur letzten Aussage: Es gilt nach zweimaliger Anwendung des vorvorigen Satz

$$G(T^{**}) = U^{-1}G(T^*)^{\perp} = U^{-1}(UG(T)^{\perp}) \perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)}.$$

$\square$