Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Donnerstag 06.12.2018**

(1) Sei $N \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeigen Sie, daß es eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ gibt, sodaß

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t) d\lambda(t),$$

in keinem Punkt $x \in N$ differenzierbar ist. (Hinweis: Seien $U_n \supset N$, $n \in \mathbb{N}$, offene Mengen mit $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie $f = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{U_n}$.)

(2) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gewählt. Eine Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \varepsilon$$

für alle disjunkten Intervalle $I_k = [\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$ mit $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \delta$. Zeigen Sie, daß jede Lipschitz-stetige Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig ist.

(3) Seien $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha \leq \beta$ gegeben. Konstruieren Sie eine meßbare Menge $E \subset \mathbb{R}$ mit

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\lambda(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta} = \alpha \text{ und } \limsup_{\delta \to 0} \frac{\lambda(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta} = \beta.$$

(4) Konstruieren Sie eine stetige, streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.