Höhere Analysis II - Notizen [1]

Jena - Wintersemester 2018 / 2019

Daniel Lenz

[1] Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Etwas Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren

In diesem Kapitel behandeln wir Grundlagen der Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren. Das Kapitel hat (ueber grosse Teile) den Charakter einer Wiederholung.

Fuer abgeschlossene Operatoren T in einem normierten Raum E entwickeln wir eine Loesungstheorie fuer Gleichungen der Form

$$(T - zI)x = y$$

bei gegebenem $y \in E$ und $z \in \mathbb{C}$. Wir wollen

- Loesbarkeit der Gleichung fuer alle y (d.h. Surjektivitaet von $T - zI$).
- Eindeutigkeit der Loesung (d.h. Injektivitaet von $T - zI$).
- Stetige Abhaengigkeit der Loesung x von y (d.h. Stetigkeit von $(T - zI)^{-1}$.
- Stetige Abhaengigkeit von z.

Die ersten drei Punkte bedeuten gerade, dass $T - zI$ stetig invertierbar ist. Entsprechende Betrachtungen sind als *Spektraltheorie* bekannt. Im Falle von Operatoren in endlichdimensionalen Raeumen (Matrizen) geht es gerade um Eigenwerte.

Definition. *Sei E ein normierter Raum und T ein linearer Operator von E nach E. Dann definiert man die Resolventenmenge $\varrho(T)$ von T als*

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I : D(T) \longrightarrow E \text{ bijektiv mit stetiger Inverser}\}.$$

Das Komplement $\mathbb{K} \setminus \varrho(T)$ heisst Spektrum von T und wird mit $\sigma(T)$ bezeichnet. Die Abbildung

$$R = R_T : \varrho(T) \longrightarrow L(E),\ \lambda \mapsto R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1},$$

heisst die Resolvente von T.

Notation. Wir schreiben auch $T - \lambda$ statt $T - \lambda I$. Oft wird auch die Resolventenmenge als Resolvente bezeichnet.

Bemerkung. Wir werden es im folgenden (fast) ausschließlich mit abgeschlossenen Operatoren in Banachraeumen zu tun haben. Denn es gilt folgendes:

- Die eingefuehrten Begriffe sind nur fuer abgeschlossene Operatoren interessant. Denn ist T nicht abgeschlossen, so ist $\varrho(T) = \emptyset$. (Bew: Sei T nicht abgeschlossen und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Ist $T - \lambda$ nicht bijektiv, so gehoert offenbar λ nicht zur Resolventenmenge. Ist $T-\lambda$ bijektiv, so kann $(T - \lambda)^{-1}$ nicht stetig sein, da sonst $(T - \lambda)^{-1}$ und damit dann auch T abgeschlossen waere.)

- Ist E ein Banachraum, so folgt aus der Abgeschlossenheit von T automatisch die Stetigkeit von $(T-\lambda)^{-1}$.

Grundlegende Eigenschaften von Spektrum und Resolvente liefert der folgende Satz. Er besagt, dass die Resolventenmenge eine schoene Menge ist und die Resolvente eine schoene Funktion.

Theorem (Grundlegende Eigenschaften von Resolvente und Spektrum). *Sei E ein Banachraum und T ein Operator von E nach E. Dann ist $\varrho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$, also $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}$, und die Resolvente*

$$R : \varrho \longrightarrow L(E),\ \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1},$$

ist analytisch, d.h. um jeden Punkt in eine absolut konvergente (also inbesondere normkonvergente) Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar.

Beweis. Das folgt letzten Endes aus der Neumannschen Reihe. Sei $z_0 \in \varrho(T)$. Dann ist $(T-z_0)$ invertierbar. Damit ist dann nach dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch

$$T - z = (T - z_0) + (z_0 - z) ='T + S'$$

invertierbar falls

$$1 > \|(z-z_0)(T-z_0)^{-1}\| = |z-z_0|\|(T-z_0)^{-1}\|$$

also

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(T-z_0)^{-1}\|}.$$

Das zeigt die Offenheit der Resolventenmenge. Weiterhin folgt aus dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch noch

$$\begin{aligned}(T-z)^{-1} &= ((T-z_0)+(z_0-z))^{-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(T-z_0)^{-1}((z-z_0)(T-z_0)^{-1})^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n(T-z_0)^{-n-1}\end{aligned}$$

mit absolut konvergenten Potenzreihe. Damit folgt die Analytizitaet. □

Beispiel - Matrizen: Sei $E = \mathbb{K}^n$ mit der Euklidischen Norm $\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$. Dann ist jede lineeare Abbildung A von E nach E stetig mit

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

und

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$$

fuer $a_{i,j} = Ae_i(j)$ (Uebung). Daher kann man in der Definition des Spektrums / der Resolvente die entsprechenden Stetigkeitsforderungen weglassen und man erhaelt fuer ein lineares A

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda : A-\lambda \text{ nicht bijektiv}\}\\ &= \{\lambda : \det(A-\lambda)=0\}\\ &= \{\lambda : A-\lambda \text{ nicht injektiv}\}\\ &= \{\text{Eigenwerte von } A\}.\end{aligned}$$

Das Spektrum ist also gerade die Menge der Eigenwerte.

Beispiel - Linksshift auf ℓ^p: Sei $p \in [1,\infty]$ gegeben und $E = \ell^p$ mit $\|\cdot\|_p$. Dabei ist

$$\ell^p := \ell^p(\mathbb{N}) := \begin{cases} \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty\} & : \ 1 \le p < \infty \\ \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : x \text{ beschraenkt}\} & : \ p = \infty \end{cases}$$

und

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p)^{1/p} & : \ 1 \le p < \infty \\ \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} & : \ p = \infty. \end{cases}$$

Sei T der Shift-Operator auf ℓ^p, d.h.

$$T : \ell^p \longrightarrow \ell^p, (Tx)(n) = x(n+1).$$

Dann gilt offenbar $\|Tx\| \le \|x\|$ und damit $\|T\| \le 1$. Wir berechnen nun das Spektrum:

Es gilt $\sigma(T) \subset B_1(0)$. Das folgt sofort aus $\|T\| \le 1$. In der Tat ist fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ der Operator

$$T - \lambda = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$$

nach dem Lemma zur Neumanschen Reihe stetig invertierbar wegen

$$\|\frac{1}{\lambda}T\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1.$$

Es gilt $U_1(0) \setminus \{0\} \subset \sigma(T)$: Sei $\lambda \in U_1(0) \setminus \{0\}$. Dann gehoert

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, x(n) = \lambda^n,$$

zu ℓ^p (wegen $|\lambda| < 1$) und verschwindet nicht (wegen $\lambda \neq 0$). Ausserdem gilt offenbar $Tx = \lambda x$, d.h.

$$(T-\lambda)x = 0.$$

Damit ist also $T - \lambda$ nicht injektiv.

Damit ergibt sich insgesamt

$$U_1(0) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \subset B_1(0).$$

Da das Spektrum abgeschlossen ist, folgt die gewuenschte Aussage.

Beachte: Fuer $1 \le p < \infty$ sind die $\lambda \in B_1(0) \setminus U_1(0)$ **keine** Eigenwerte (wie man leicht sieht). Das zeigt, dass das Spektrum eines Operators in einem unendlich dimensionalen Raum im allgemeinen nicht (nur) aus Eigenwerten besteht.

Beispiel - Rechtsshift auf ℓ^2: Sei $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ der Rechtsshift d.h.

$$(Sx)(n) = \begin{cases} x(n-1) & : \quad n \geq 2 \\ 0 & : \quad n = 1. \end{cases}$$

Dann ist S beschraenkt, und es gilt - wie man direkt sieht -

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

fuer alle $x, y \in \ell^2$. Damit folgt also $S = T^*$ und $T = S^*$. Damit folgt

$$\sigma(S) \stackrel{!}{=} \overline{\sigma(T)} = B_1(0).$$

Es bleibt ! zu zeigen: Wir zeigen die entsprechende Aussage fuer die Resolvente, d.h.

$$\varrho(S) = \overline{\varrho(T)}.$$

Wir zeigen $\supset$: Sei $\lambda \in \varrho(T)$. Dann existiert also ein beschraenkter Operator R mit

$$(T - \lambda)R = I = R(T - \lambda).$$

Durch Adjungieren folgt dann

$$R^*(T^* - \overline{\lambda}) = I = (T^* - \overline{\lambda})R^*.$$

Damit gehoert dann also $\overline{\lambda}$ zu $\varrho(T^*) = \varrho(S)$.
Wir zeigen $\subset$: Das folgt analog unter Nutzen von $S^* = T$.

Beispiel - Multiplikationsoperatoren. (Hier lernen wir ein Beispiel eines im allgemeinen unbeschraenkten Operator kennen.) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und M_u der maximale Operator der Multiplikation mit u auf $L^p(X, \mu)$ d.h.

$$D(M_u) := \{f \in L^p(X, \mu) : uf \in L^p(X, m)\}$$
$$M_u f = uf.$$

Dann gilt:

- Fuer $1 \leq p < \infty$ ist $D(M_u)$ dicht in $L^p(X, \mu)$. Gilt $p = \infty$, so ist $D(M_u)$ genau dann dicht, wenn u wesentlich beschraenkt ist. In diesem Fall gilt $D(M_u) = L^\infty(X, \mu)$.
- $\sigma(M_u) =$ wesentlicher Wertebereich von $u := \{\lambda \in C : \mu(u^{-1}(U_\lambda(\varepsilon))) > 0 \text{ for all } \varepsilon > 0\}$.
- $\varrho(M_u) = \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } x \in X\}$.
- $(M_u - z)^{-1} = M_{\frac{1}{u-z}}$ fuer alle $z \in \varrho(M_u)$.
- Es ist λ ein Eigenwert von $D(M_u)$ genau dann, wenn $\mu(u^{-1}(\{\lambda\})) > 0$ gilt.

Beweis. Wir lassen den Beweis des ersten und vierten Punkt als Uebungsaufgabe. Wir zeigen nun die mittleren beiden Punkte zusammen. Sei dazu

$$\varrho' := \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } k \in X\}.$$

Es gilt $\varrho' = \varrho(T)$:
Fuer $z \in \varrho'$ ist $g := \frac{1}{u-z}$ eine beschraenkte Funktion und es gilt offenbar

$$(M_u - z)M_g = I, \quad M_g(M_u - z) = I_{D(M_u)}.$$

Es ist also $z \in \varrho(T)$ und die angegebene Formel fuer die Inverse von $(M_u - z)$ gilt.

Fuer $z \notin \varrho'$ gilt fuer jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}) > 0.$$

Da μ σ-endlich ist, gibt es dann eine meßbare Menge A mit $0 < \mu(A) < \infty$ und

$$A \subset \{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}.$$

Dann gehoert die charakteristische Funktion 1_A von A zu $L^p(X, \mu)$ und es gilt

$$\|(M_u - z)1_A\| \leq \varepsilon \|1_A\|.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gehoert dann also z nicht zu ϱ (s.o.).
Damit sind alles gewuenschten Aussagen gezeigt. In Spezialfaellen kann man noch etwas mehr sagen. Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich fuer $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und μ Zaehlmass. Dann ist das Spektrum gerade gegeben durch

$$\overline{\{u(k) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Das laesst sich wie folgt verallgemeinern: Ist man in einer topologischen Situation, so kann man das Spektrum durch das Bild von u beschreiben. Genauer gilt folgendes: Sei X sogar ein topologischer, σ-kompakter Raum und es sei μ endlich auf kompakten Mengen und gelte fuer jede offene nichtleere Menge U noch $\mu(U) > 0$ und es sei $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\text{wesentliches Bild von } u = \overline{\text{Bild von } u}.$$

Beispiel mit leerem Spektrum ueber $\mathbb{C}$: Das gibt es tatsaechlich. Wir geben weiter unten Details.

Aus den Beispielen entnehmen wir noch eine Folgerung.

Folgerung. *Jede abgeschlossene Menge von $\mathbb{C}$ kann Spektrum eines Operator sein.*

Beweis. Jede nichtleere abgeschlossene Menge A kann man als Abschluss einer abzaehlbaren Menge erhalten. Damit kann man solche Menge als Spektrum von Multiplikationsoperatoren in ℓ^p erhalten. Die leere Menge tritt ebenfalls als Spektrum auf.

□

Ende der Vorlesung.

Wir komen nun noch auf eine **Einteilung des Spektrums** zu sprechen: Sei T ein abgeschlossener Operator auf dem Banachraum E.

Die Menge der *Eigenwerte* bzw. das *Punktspektrum*:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht injektiv}\};$$

das *stetige Spektrum*:

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv mit dichtem Bild, aber nicht surjektiv}\};$$

das *residuelle Spektrum*:

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv mit nicht dichtem Bild}\}.$$

'Oft' ist es so, dass $(T-\lambda)$ injektiv ist genau dann, wenn $T-\lambda$ dichtes Bild hat. Dann gibt es also kein residuelles Spektrum.
Um die Einteilung besser zu verstehen, fuehren wir noch einen Begriff ein: Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *approximativer Eigenwert* von T, wenn es eine Folge (x_n) in E gibt mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\|(T-\lambda)x_n\| \to 0, n \to \infty$$

oder - aequivalent -, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in E$ existiert mit $\|x\| = 1$ und $\|(T-\lambda)x\| \le \varepsilon$. Ebenso erinnern wir an folgende Eigenschaft der Resolventenmenge: Sei λ in $\varrho(T)$ gegeben. Dann hat $T-\lambda$ die folgende starke Injektivitaetseigenschaft: Es existiert ein $c > 0$ mit

$$\|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\|$$

fuer alle $x \in D(T)$. (In der Tat gilt mit dem beschraenkten $R = (T-\lambda)^{-1}$ dann

$$\|x\| = \|(T-\lambda)^{-1}(T-\lambda)x\| \le \|(T-\lambda)^{-1}\|\|(T-\lambda)x\|$$

und das liefert sofort die gewuenschte Ungleichung.)

Lemma. *Sei T ein abgeschlossener Operator im Banachraum. Dann sind fuer $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften aequivalent:*

(i) *Es ist $(T-\lambda)$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen.*
(ii) *Es gibt ein $c > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\|$ fuer alle $x \in E$.*
(iii) *Es ist λ kein approximativer Eigenwert von T.*

Beweis. Die Aequivalenz von (ii) und (iii) ist klar. Die Implikation (i)$\Longrightarrow$(ii) folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Die Implikation (ii)$\Longrightarrow$(i) folgt aus der Abgeschlossenheit von T. $\square$

Bemerkung. Das Lemma kann als Charakterisierung approximativer Eigenwerte verstanden werden ebenso wie als Charakterisierung der Gueltigkeit der Abschaetzung (ii).

Folgerung. *Sei T ein abgeschlossener Operator im Banachraum E. Dann gelten die folgenden Aussagen:*
(a) Es sind Punktspektrum und stetiges Spektrum in der Menge der verallgemeinerten Eigenwerte enthalten.
(b) Ist $\lambda \in \sigma(T)$ und gibt es ein $c > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\|$ fuer alle $x \in E$, so gehoert λ zu $\sigma_r(T)$.
(c) Gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$, so stimmt das Spektrum mit der Menge der approximativen Eigenwerte ueberein und die Resolventenmenge ist gerade die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$ fuer die ein $c > 0$ existiert mit $\|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\|$ fuer alle $x \in E$.

Bemerkung. Der Fall in (b) tritt tatsaechlich auf. (Rechtsshift T mit $\lambda = 0$.

Beweis. (a) Fuer das Punktspektrum ist die Aussage klar. Fuer das stetige Spektrum gilt nach Definition ja gerade nicht die Aussage (i) des vorigen Lemma. Damit gilt dann auch (iii) nicht.

(b) Nach Voraussetzung ist λ kein approximativer Eigenwert. Damit muss nach (a) dann λ zum residuellen Spektrum gehoeren.

(c) Nach (b) und der Voraussetung $\sigma_r(T) = \emptyset$ gehoert jedes λ mit $\|(T-\lambda)x\| \ge c\|x\|$ zur Resolventenmenge. Damit stimmt die Resolventemenge mit der Menge dieser λ ueberein. Das liefert dann nach dem vorigen Lemma auch die Aussage zum Spektrum. $\square$

Wir kommen nun noch zu wichtigen algebraischen Umformungen.

Proposition (Resolventenformeln - abstrakt). *Seien E, F normierte Raeume und S, T bijektive lineare Operatoren von E nach F.*
(a) Ist $D(S) \subset D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1}$.
(b) Ist $D(S) = D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1}$.

Bemerkung.

- Formal ist das ganz klar aufgrund von
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x}(y-x)\frac{1}{y}.$$
Es geht darum, ob die angegebenen Ausdruecke definiert sind.
- Ist $T = S + P$ mit invertierbaren T, S mit gleichem Definitionsbereich, so folgt also
$$T^{-1}PS^{-1} = S^{-1}PT^{-1}.$$

Beweis. Es reicht (a) zu zeigen. Sei $y \in F$ beliebig und $x = S^{-1}y \in D(S) \subset D(T)$. Dann gilt
$$\begin{aligned} T^{-1}y - S^{-1}y &= T^{-1}(SS^{-1}y) - T^{-1}TS^{-1}y \\ &= T^{-1}Sx - T^{-1}Tx \\ &= T^{-1}(Sx - Tx) \\ &= T^{-1}(S-T)x \\ &= T^{-1}(S-T)S^{-1}y. \end{aligned}$$
$\square$

Theorem (Resolventenformeln). *Seien S, T lineare Operatoren auf dem mormiereten Raum E.*
(a) Fuer $z, z' \in \varrho(T)$ gilt die erste Resolventengleichung
$$R_T(z) - R_T(z') = (z-z')R_T(z)R_T(z') = (z-z')R_T(z')R_T(z).$$
(b) Ist $D(S) = D(T)$ so gilt fuer $z \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ die zweite Resolventengleichung
$$R_T(z) - R_S(z) = R_T(z)(S-T)R_S(z) = R_S(z)(S-T)R_T(z).$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition.
(a) $T - z$, $T - z'$ statt T, S.
(b) $T - s$, $S - z$ statt T, S. $\square$

Die bisherigen Betrachtungen galten fuer abgeschlossene Operatoren. Wir kommen nun zu beschraenkten Operatoren. Dort laesst sich mehr ueber das Spektrum sagen und insbesondere seine Lage genauer bestimmen. Dazu brauchen wir aber noch etwas Vorbereitungen.

KAPITEL 2

Das Spektrum beschränkter Operatoren

In diesem Kapitel untersuchen wir die Lage des Spektrum beschraenkter Operatoren. Als wesentliches Hilfsmittel benoetigen wir etwas Funktionentheorie.

Exkurs Funktionentheorie

Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst holomorph, wenn fuer jedes $p \in \Omega$ der Grenzwert*

$$f^{'}(p) = \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existiert.

Bemerkung. Die Existenz dieses Grenzwertes ist eine sehr starke Forderung und deutlich staerker als die Forderung der Differenzierbarkeit bei reellwertigen Funkionen. Inbesondere impliziert sie, dass die Funktionen analytisch sind (s.u.).

Definition (Kurvenintegral). *Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ stetig und (stueckweise) stetig differenzierbar und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man das Kurvenintegral von f entlang γ gemaess*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt.$$

Beispiel. Sei Fuer $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = Re^{it}$ (fuer $R > 0$) gilt nach einer kleinen Rechnung

$$\int_\gamma f(z)dz = .. = \begin{cases} 2\pi i & : \quad n = -1 \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist unabhaengig von R! Analog sieht man fuer ein beliebiges $p \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = p + Re^{it}$

$$\int_\gamma (z - p)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : \quad n = -1 \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Notation. Ein $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto p + Re^{it}$, so schreibt man statt $\int_\gamma$ auch $\int_{\partial B_R}$. Das werden wir auch im folgenden machen.

Theorem (Charakterisierung Holomorphie). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist f holomorph.*

(ii) *Es kann f um jeden Punkt $p \in \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelt werden und diese konvergiert auf $B_R(p)$ fuer jedes $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$. 'f ist analytisch.'*

(iii) *Es gilt fuer jedes $p \in \Omega$ und $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$ die Formel*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta$$

fuer jedes $q \in U_R(p)$. 'Cauchy-Integralformel.'

Bemerkung. Die Formel in (iii) mag verblueffend erscheinen. Fuer $p = q$ kann sie aber leicht als Folgerung aus dem Beispiel gesehen werden. Ist naemlich f durch ein Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ gegeben, so folgt fuer $R > 0$ kleiner als der Konvergenzradius der Potenzreihe sofort

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-p} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^{n-1} dz \\
\text{(Potenzreihe glm. konv)} \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} (z-p)^{n-1} dz \\
\text{(Beispiel)} \quad &= a_0 \\
&= f(p).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen (ii)$\Longrightarrow$ (i) und (iii)$\Longrightarrow$ (ii) vollstaendig und (i)$\Longrightarrow$ (iii) mittels eines hier nicht bewiesenen wesentlichen Zwischenschrittes.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Potenzreihen sind differenzierbar (vgl. Analysis I).

(iii)$\Longrightarrow$ (ii): Waehle $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$. Dann gilt nach (iii) also

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz.$$

Wir untersuchen den Integranden in einer *Zwischenrechnung*:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)}{z-q} &= \frac{f(z)}{z-p+p-q} \\
&= \frac{f(z)}{(z-p)(1-\frac{q-p}{z-p})} \\
\textit{(geom. Reihe)} \quad &= \frac{f(z)}{(z-p)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{q-p}{z-p})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (q-p)^n \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Dabei konvergiert die Reihe gleichmaessig in $\partial B_R(p)$ wegen

$$\left| \frac{q-p}{z-p} \right| = \frac{|q-p|}{R} < 1.$$

(Hier folgt die letzte Ungleichung wegen $q \in U_R(p)$. Nach dieser Untersuchung des Integranden und unter Nutzen der gleichmaessigen Konvergenz finden wir also

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (q-p)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz.$$

Das ist die gewuenschte Aussage.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Wir nutzen folgende

Aussage: Sei $s > 0$ mit $q \in B_s(q) \subset U_R(p) \subset B_R(p) \subset \Omega$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz = \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z-q} dz.$$

Beweisskizze fuer die Aussage: (Zeichnungen machen!) Der Beweis erfolgt in mehrere Schritten. Zunaechst zeigt man, dass Kurzvenintegrale ueber Dreieckswege verschwinden, wenn die zugrundeliegende Funktion holomorph ist auf einer Umgebung des Dreiecks. Dieser Beweis ist raffiniert und einfach. Anschließend zeigt man das Verschwinden des Kurvenintegrals ueber Polygonzuege, wenn die zugrundeliegende Funktion holomorph ist auf einer Umgebung des vom Polygonzug eingeschlossenen Gebietes. Daraufhin zeigt man das Verschwinden der Kurvenintegrales ueber beliebige Kurven, die gut durch Polygonzuege approximiert werden koennen, wenn die zugrundeliegend Funktion holomorph ist in einer Umgebung des von der Kurve eingeschlossenen Gebietes. Schliesslich wendet man das an auf die Funktion g mit $g(z) = \frac{f(z)}{z-q}$ auf einer Umgebung von $B_R(p) \setminus U_s(q)$.

Nach der Zwischenaussage gilt

$$\int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz = \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z-q} dz$$

fuer alle genuegend kleinen $s > 0$. Insbesondere haengt die rechte Seite nicht von einem solchen $s > 0$ ab. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz &= \lim_{s \to 0} \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z-q} dz \\
&= \lim_{s \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{it}+q)}{se^{it}} ise^{it} dt \\
&= \lim_{s \to 0} i \int_0^{2\pi} f(se^{it}+q) dt \\
(f \ stetig) &= 2\pi i f(q).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis.

□

Bemerkung. Der Beweis liefert sogar eine genaue Darstellung der Koeffizienten a_n in der Potenzreihe, naemlich

$$a_n = \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

und das ist unabhaengig von $R > 0$ (vorausgestetzt $B_R(p) \subset \Omega$).

Folgerung (Satz von Liouville). *Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschraenkt. DAnn ist f konstant. Insbesondere gilt $f \equiv 0$ falls $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist mit $f(z) \to 0$, $z \to \infty$.*

Beweis. Da f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, kann man es in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius ∞. Damit folgt also

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

und fuer die a_n gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Waehlt man $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ so ergibt sich

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{r^n} dt \leq \frac{2\pi \|f\|_\infty}{2\pi r^n} = \frac{\|f\|_\infty}{r^n}$$

fuer alle $r > 0$. Damit folgt dann also $a_n = 0$ fuer alle $n \neq 0$ und damit $f \equiv a_0$.
Zum 'Insbesondere': Aus $f(z) \to 0, |z| \to \infty$ folgt, dass f beschraenkt ist. Damit folgt aus dem schon gezeigten dann $f \equiv constant$. Wegen $f(z) \to 0, |z| \to \infty$ muss dann aber gelten $constant = 0$. □

Folgerung (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom hat eine Nullstelle (ueber $\mathbb{C}$).*

Beweis. Sei P ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstelle. Dann liefert der Satz von Liouville angewendet auf $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ also $f \equiv 0$. Das ein Widerspruch. □

Ende des Exkurses Funktionentheorie

Fuer die angestrebten Betrachtungen zur Lage des Spektrums beschraenkter Operatoren brauchen wir noch ein Lemma, das gar nichts mit Operatoren zu tun hat.

Lemma (Konvergenz submultiplikativer Folgen). *Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty)$ submultiplikativ (d.h. es gilt $a_{n+m} \leq a_n a_m$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$). Dann existiert $\lim_n a_n^{1/n}$ und es gilt*

$$\lim_n a_n^{1/n} = \inf_n a_n^{1/n}.$$

Bemerkung. Eine entsprechende Aussage kann man fuer subadditive Funktionen beweisen. Tatsaechlich entsprechend sich subadditive und submultiplikative Abbildungen via Logarithmieren.
Beweis. Sei $\alpha := \inf a_n^{1/n}$. Dann gilt offenbar $\liminf a_n^{1/n} \geq \alpha$. Es bleibt also

$$\limsup a_n^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$$

fuer $\varepsilon > 0$ beliebig zu zeigen. Waehle N mit $a_N^{1/N} < \alpha + \varepsilon$. Dann laesst sich jedes n eindeutig darstellen als $n = Nk + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq N - 1$. Es folgt

$$a_n = a_{Nk+r} \leq a_N^k a_r$$

also
$$a_n^{1/n} \le (a_N^k a_r)^{1/n} = a_N^{k/n}(a_r)^{1/n} \le a_N^{k/n} C^{1/n}$$
mit $C := \max\{1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$. Es gilt dann $k/n \to 1/N$ fuer $n \to \infty$ und $C^{1/n} \to 1$. Damit folgt die Aussage. $\square$

Ist T ein beschraenkter Operator in einem normierten Raum, so ist die Abbildung
$$a : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty),\ a_n = \|T^n\|,$$
submultiplikativ (da die Norm submultiplikativ ist). Damit folgt aus dem Lemma dann sofort
$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$
Diese Groesse spielt eine wichtige Rolle und bekommt einen eigenen Namen.

Definition (Spektralradius). *Sei E ein normierter Raum mit $E \neq \{0\}$ und $T \in L(E)$. Dann definiert man den Spektralradius $r(T)$ als*
$$r(T) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Bemerkungen

- Es ist offenbar $r(T) \le \|T\|$ (da $\|T\| = \|T^1\|^1$ als Wert im Infimum auftritt).
- Im allgemeinen gilt $r(T) < \|T\|$. Wir diskutieren zwei Beispiele:
  - Sei T auf $\mathbb{K}^2$ mit T gegeben durch die Matrix
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
  Dann gilt $\|T\| \ge |a|$. Eine einfache Induktion zeigt weiterhin
  $$T^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{an}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$
  Damit folgt
  $$\|T^n\| \le \frac{1}{2^n}(2 + 4|a|^2 n^2)^{1/2}$$
  also
  $$r(T) \le 1/2.$$
  (Hier wird verwendet, dass fuer den durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschriebenen Operator auf $\mathbb{K}^N$ mit der Euklidischen Norm die Abschaetzung
  $$\|A\| \le \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$
  gilt.)
  - Noch stärkeres Auseinanderfallen von Norm und Spektralradius sieht man fuer T auf $\mathbb{K}^2$ mit Matrix gegeben durch
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Dann gilt $T^n = 0$ fuer $n \ge 2$ und damit $r(T) = 0$ aber $\|T\| = 1$.

- Ist E ein Hilbertraum und T ein normaler Operator (d.h. es gilt $T^*T = TT^*$), so gilt $r(T) = \|T\|$. Das gilt also inbsesondere fuer selbtadjungierte und fuer unitaere Operatoren. Der Beweis ist nichttrivial. Wir skizzieren kurz die Details: Wir zeigen zunaechst

$$\|T\| = \|T^*\| \text{ und } \|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Die erste Aussage kennen wir schon. Fuer die zweite Aussage reicht es dann $\|T^*T\| = \|T\|^2$ zu beweisen. Wir zeigen zwei Ungleichungen.

$\leq$: Das ist klar.

$\geq$: Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\|T^*T\| \geq \sup\{|\langle T^*Tx, x\rangle| : \|x\| \leq 1\} = \|T\|^2.$$

Nun zum eigentlichen Schluss. Sei T ein ein normaler Operator. Dann gilt also

$$TT^* = T^*T.$$

Dann zeigt eine einfache Induktion sogar folgende Aussage

$$\|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}$$

fuer alle natuerlichen Zahlen n. Damit koennen wir schließen

$$\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^{2^n})^*T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}.$$

Das liefert dann

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$$

und damit folgt

$$r(T) = \|T\|.$$

Das folgende Theorem zeigt im wesentlichen, dass der Spektralradius der Radius des kleinsten Kreises um 0 ist, der das Spektrum enthaelt. Das erklaert insbesondere die Bezeichnung.

THEOREM (Spektrum fuer beschraenkte Operatoren). *Sei $E \neq \{0\}$ ein Banachraum ueber $\mathbb{C}$ und $T \in L(E)$. Dann ist $\sigma(T)$ nichtleer und kompakt und es gilt*

$$\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r(T).$$

Insbesondere ist also $\sigma(T)$ in $B_{r(T)}$ enthalten. Weiterhin ist

$$(T - z)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n \ (Neumannsche Reihe)$$

absolut konvergent in $\mathbb{C} \setminus B_{r(T)}$.

Zeichnung. $\sigma(T)$ ist kompakt, Teilmenge von $B_{r(T)}$ und schneidet den Rand dieser Kugel. Ausserhalb dieser Kugel laesst es sich in Potenzreihe entwickeln.

Ende der Vorlesung

Beweis. Sei $r := r(T)$.

Behauptung: Fuer $z \notin B_r$ gilt $z \in \varrho(T)$ und die angebenen Formel der Neumannschen Reihe.

Beweis: Das folgt aus der Neumannschen Reihe. Fuer $|z| > r$ ist naemlich

$$\limsup_n \|(\frac{1}{z}T)^n)\|^{1/n} = \frac{1}{|z|}r < 1$$

und damit gilt dann

$$(T - z) = -z + T = -z(1 - \frac{1}{z}T) = -z\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{z})^n$$

mit absolut konvergenter Reihe.

Behauptung: Es ist $\sigma(T)$ kompakt mit $\sigma(T) \subset B_r$.
Beweis: Wir wissen schon, dass $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. Nach der vorangehenden Behauptung ist es in B_r enthalten, also insbesondere beschraenkt. Damit folgt die gewuenschte Aussage.

Behauptung: $\sigma(T) \neq \emptyset$:
Beweis: **Idee.** Satz von Liouville anwenden auf die beschraenkte analytische Funktion R!
Kleines Problem: Es nimmt R nicht Werte in $\mathbb{C}$ an sondern in $L(E)$. Das wird durch Nachschalten eines stetigen Funktionales gelost.

Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$, also $\varrho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $R = R_T$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Dann ist fuer jedes $\varphi \in L(E)'$ die Funktion

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(R(z)),$$

analytisch. Weiterhin gilt nach dem schon bewiesenen fuer $|z| > r$

$$\phi(z) = \frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\varphi(T^n).$$

Das impliziert

$$|\phi(z)| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi\|\frac{\|T^n\|}{|z|^n} \leq \frac{1}{|z|}\|\varphi\|\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{|z|}2\|\varphi\|.$$

fuer $|z| > 2\|T\|$. Das liefert

$$|\phi(z)| \to 0, |z| \to \infty.$$

Nach dem Satz von Liouville folgt also $\phi \equiv 0$. Da φ beliebig war folgt aus Hahn-Banach dann $R \equiv 0$. Widerspruch da $R(z)$ immer injektiv ist.

Behauptung: $\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r$*:*
Beweis: Sei $r_0 := \max\{|z| : z \in \sigma(T)\}$. (Das Maximum existiert, da $\sigma(T)$ abgeschlossen und nach dem schon bewiesenen nichtleer und beschraenkt also kompakt ist). Nach dem schon bewiesenen gilt $r_0 \leq r$.
Idee. R ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus B_{r_0}$ und in $\mathbb{C} \setminus B_r$ durch die Potenzreihe $-\sum \frac{1}{z^{n+1}}T^n$ gegeben. Da Potenzreihen 'maximal' existieren, muss $r = r_0$ sein.

Hier sind die Details: Wir waehlen wieder $\varphi \in L(E)'$ und betrachten

$$\phi : \varrho(T) \longrightarrow \mathbb{C}, \phi(z) = \varphi(R(z)).$$

Dann ist ϕ analytisch in $\varrho(T) \supset \mathbb{C} \setminus B_{r_0}$. Insbesondere ist also das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_s(0)} z^m \phi(z) dz \quad (I)$$

unabhaengig von $s > r_0$.
Fuer $s > r$ koennen wir (I) mittels der schon bewiesenen Potenzreiche leicht berechnen zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial B_s(0)} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} \varphi(T^n) dz \\ \text{(glm. konvergent)} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_s(0)} z^{m-n-1} dz \right) \varphi(T^n) \\ (s.o.) &= -2\pi i \varphi(T^m). \end{aligned}$$

Fuer $s > r_0$ koennen wir das Integral ausserdem auch abschaetzen:

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2\pi s s^m \sup_{|z|=s} |\phi(z)| \\ &\leq 2\pi s^{m+1} \|\varphi\| \sup_{|z|=s} \|R(z)\| \\ &= 2\pi C_s \|\varphi\| s^{m+1} \end{aligned}$$

mit $C_s := \sup_{|z|=s} \|R(z)\|$.
Fasst man das zusammen, so ergibt sich

$$|\varphi(T^m)| = \frac{|I|}{2\pi} \leq C_s s^{m+1} \|\varphi\|.$$

Da $\varphi \in L(E)'$ beliebig war, folgt aus dem Satz von Hahn-Banach also

$$\|T^m\| \leq C_s s^{m+1}.$$

Bilden des lim sup und der m-ten Wurzel liefert fuer festes $s > r_0$ also

$$r(T) = \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \limsup_{m\to\infty} C_s^{1/m} s^{(m+1)/m} = s.$$

Da $s > r_0$ beliebig war, folgt

$$r \leq r_0.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen - Diskussion der Voraussetzungen des Theorems.

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so kann das Spektrum natuerlich leer sein. Betrachte zum Beispiel $E = \mathbb{R}^2$ und T eine 'Drehung um die z-Achse um 90?', d.h. T ist gegeben durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dann hat T keinen reellen Eigenwert.
- Der Beweis des nichtleeren Spektrums nutzt Funktionentheorie. Tatsaechlich wird fuer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dazu schon im endlichdimensionalen Fall Funktionentheorie verwendet, wenn man verwendet, dass das charakteristische Polynom eine Nullstelle hat.

- Fuer unbeschraenkte Operatoren kann das Spektrum auch ueber $\mathbb{C}$ leer sein: Sei $E = C([0,1])$ und der Operator T definiert durch

$$D(T) = \{f \in C([0,1]) : \text{es existiert } g \in C([0,1]) \text{ mit } f(t) = \textstyle\int_0^t g(s)ds\}$$
$$Tf = g.$$

Es ist also $Tf = f'$ und $f(0) = 0$ fuer alle $f \in D(T)$. (Tatsaechlich besteht der Definitionsbereich von T genau aus den stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$, die in 0 verschwinden.)

Nun kann man kann die Theorie der gewoehnlichen Differentialgleichungen nutzen um $(T-z)f = h$ zu loesen. Zunaechst liefert die Theorie (Eindeutigkeitssatz) zusammen mit $f(0) = 0$ die Injektivitaet von $(T-z)$ auf $D(T)$. Was die Surjektivitaet betrifft, so liefert die Loesungsformel fuer lineare Differentialgleichungen leicht

$$\begin{aligned}(T-z)^{-1}h(x) &= e^{zx}\int_0^x e^{-zt}h(t)dt \\ &= \int_0^x (h(t) + ze^{zt}\int_0^t e^{-zs}h(s)ds)dt\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren: Die Gueltigkeit der zweiten Gleichung folgt einfach durch Partielles Integrieren (mit $u = e^{-zt}$ und $v' = h$). Die rechte Seite ist offenbar ein linearer Operator von h. Aus der zweiten Formel sieht man sofort, dass die rechte Seite in $D(T)$ liegt. Aus der ersten Formel sieht man leicht, dass Anwendung von $T - z$ gerade h ergibt.

KAPITEL 3

Adjungierte Operatoren

In diesem Abschnitt lernen wir die adjungierten Operatoren kennen. Wir beginnen mit etwas **Notation**. Ist E ein topologischer Vektorraum mit Dualraum $E^{'}$, so bezeichnen wir die Auswerten eines $\varphi \in E^{'}$ an der Stelle $x \in E$ mit (φ, x) d.h.

$$(\varphi, x) := \varphi(x).$$

Diese Darstellung hat zwei Vorteile: Sie betont die symmetrische Rolle von φ und x und sie unterstreicht die Analogie zu Betrachtungen im Hilbertraum. Die Grundidee im Zusammenhang mit adjungierten Operatoren ist, dass gilt

$$(\varphi, Tx) = (T^{*}\varphi, x)$$

fuer alle x aus dem Raum und φ aus dem Dualraum. Diese Konzepte koennen in allgemeinen topologischen Vektorraeumen definiert werden. Wir beschraenken uns aber auf Banachraeume. Fuer Hilbertraeume sind uns entsprechende Betrachtungen (fuer beschraenkte Operatoren) schon vertraut. Zum besseren Verstaendnis ist es sinnvoll, sich an das Vorgehen im Hilbertraum zu erinnern: Fuer ein stetiges T ist

$$x \mapsto \langle y, Tx \rangle$$

stetig und damit folgt aus dem Lemma von Riesz die Existenz eines $\widehat{y}$ mit $\langle \widehat{y}, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$ fuer alle x.

1. Adjungierte Operatoren in Banachraeumen

Seien E und F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F (d.h. es gibt einen Unterraum $D = D(T)$ von E, der durch T linear nach F abgebildet wird).

Ein linearer Operator S von $F^{'}$ nach $E^{'}$ heisst *formal zu T adjungiert*, wenn gilt

$$(S\varphi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in D(S) \subset F^{'}$ und $x \in D(T)$. (Zeichnung.) Dann ist

$$S\varphi|_{D} = \varphi \circ T : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit eindeutig stetig auf $\overline{D}$ fortsetzbar. Diese Fortsetzung wird mit $\overline{\varphi \circ T}$ bezeichnet. Ist T dicht definiert (d.h. $D = D(T)$ dicht in E), so ist also $\psi := S\varphi$ durch φ (und T) eindeutig bestimmt, in dem Sinne, dass es hoechstens ein ψ mit der Eigenschaft

$$(\psi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $x \in D$ gibt.

Sei nun T dicht definiert. Dann definiert man den Operator T^* durch

$$D(T^*) := \{\varphi \in F^{'} : D \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, Tx) \ \ stetig\}$$

$$T^*\varphi := \overline{\varphi \circ T}.$$

Alternativ kann man auch schreiben

$$D(T^*) := \{\varphi \in F^{'} : \exists \psi \in E^{'} : (\psi, x) = (\varphi, Tx) \text{fuer alle } x \in E\},$$

$$T^*\varphi := \psi.$$

Dann ist T^* ein linearer Operator von $F^{'}$ nach $E^{'}$ (leicht...) Nach Konstruktion gilt

- T^* ist zu T formal adjungiert d.h. $(\varphi, Tx) = (T^*\varphi, x)$ fuer alle $x \in D$ und $\varphi \in D(T^*)$.
- Ist S zu T formal adjungiert so ist S eine Einschraenkung von T^*.

Es ist also T^* der maximale zu T adjungierte Operator. Wir werden ihn im folgenden nur als d e n adjungierten Operator bezeichnen. Ist S eine Einschraenkung von T so schreiben wir auch $S \subset T$. Damit gilt insbesondere:

Proposition (Charakterisierung adjungierter Operator). *Seien E, F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F, der dicht definiert ist. Dann ist der Operator S von $F^{'}$ nach $E^{'}$ genau dann der adjungierte von T, wenn gilt*

- *S ist zu T formal adjungiert. ($\Longleftrightarrow S \subset T^*$)*
- *$D(T^*) \subset D(S)$.*

Hat man es mit beschraenkten Operatoren zu tun, so braucht man sich keine Sorgen zu machen ;-)

Theorem. *Sind E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann gehoert T^* zu $L(F^{'}, E^{'})$ und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$. In diesem Fall ist T^* der einzige zu T formal adjungierte auf ganz $F^{'}$ definierte Operator.*

Beweis. Wir berechnen T^*: Es ist

$$\varphi \circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

fuer alle $\varphi \in F^{'}$ stetig. Also gilt

$$(\varphi \circ T, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in F^{'}$ und $x \in E$. Damit folgt

$$D(T^*) = F^{'}, \ \ T^*\varphi = \varphi \circ T.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup \|T^*\varphi\| : \varphi \in F^{'}, \|\varphi\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi \circ T(x)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|(\varphi, Tx)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1\} \\ (Hahn-Banach) \quad &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Damit ist T^* stetig mit $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Beispiel - Matrizen. Sei $A : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^M$ linear gegeben durch die Matrix (a_{ij}) bzgl. Basen e_i und d_j. Dann ist der adjungierte Operator bzgl. der dualen Basen gegeben durch die Matrix a^* mit $a^*(i,j) = a(j,i)$.
(Bew. Uebung, Nachrechnen).

Beispiel - Multiplikationsoperatoren in L^p. Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein σ-endlicher Massraum und $t : X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Sei fuer $p \in [1,\infty]$ der Operator $M_t^{(p)}$ der maximale Operator der Multiplikation auf $L^p(X,\mu)$. Fuer $p \in [1,\infty)$ ist $M_t^{(p)}$ dicht definiert und der adjungierte ist gegeben durch $M_t^{(q)}$ (d.h. den maximalen Operator der Multiplikation mit t auf $L^q(X,\mu)$) fuer $1/q + 1/p = 1$.
Bew. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen.

Es ist $M_t^{(p)}$ dicht definiert: Sei (X_n) eine aufstgeigende Folge von messbaren Mengen mit endlichem Mass und $X = \cup X_n$. Sei
$$Y_n := X_n \cap \{x : |t(x)| \leq n\}.$$
Dann sind die Y_n messbar, aufsteigend mit endlichem Mass und $X = \cup Y_n$. Dann ist die Menge
$$L := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ beschrankt und es gibt } N \text{ mit } f = 0 \text{ in } Y_N^c\}$$
dicht in L^p und in $D(M_t^{(p)})$ enthalten.

Es ist $M_t^{(q)}$ formal zu $M_t^{(p)}$ adjungiert: Das ist klar.

Es gilt $D((M_t^{(p)})^*) \subset D(M_t^{(q})$: Sei $f \in D((M_t^{(p)})^*) \subset L^q(X,\mu)$. Damit kann man also
$$D(M_t^{(p)}) \ni g \mapsto (f, M_t g) = \int_X f(M_t g) d\mu = \int_X (tf) g d\mu$$
zu einem beschraenkten Funktional auf L^p fortsetzen. Daher gibt es also ein $\widetilde{f} \in L^q(X,\mu)$ mit
$$\int_X (tf) g d\mu = \int_X \widetilde{f} g d\mu$$
fuer alle $g \in L$. Damit folgt leicht $tf = \widetilde{f}$ und es gehoert also f zu $D(M_t^{(q})$.
(Es ist eine gute Uebung sich den - etwas einfacheren Beweis fuer ℓ^p-Raeume zu ueberlegen.).

Beispiel - Integraloperatoren. Seien (X,μ) und (Y,ν) Massraeume mit endlichem Mass. Sei $K : Y \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar und beschraenkt. Dann ist der zugehoerige Integraloperator
$$K : L^p(X,\mu) \longrightarrow L^p(Y,\nu), Kf(y) = \int_X k(y,x) f(x) d\mu(x)$$
beschraenkt mit
$$\|K\| \leq \|k\|_\infty m(X)^{1/q} m(Y)^{1/p}.$$
Der adjungierte Operator ist gegeben durch
$$\widetilde{K} : L^q(Y,\nu) \longrightarrow L^q(X,\mu), \widetilde{K} g(x) = \int \widetilde{k}(x,y) g(y) d\nu(y)$$
mit $\widetilde{k}(x,y) = k(y,x)$.

Bemerkung. Konkret mag man etwa an kompakte topologische Raeume X und Y und ein stetiges k denken. Fuer kompakte Raeume ist die Endlichkeit des Masses eine sehr naheliegende Forderung (und folgt etwa aus geeigneten Regularitaetsannahmen.)

Beweis. Man sieht leicht, dass $Kf(y)$ tatsaechlich fuer alle $y \in Y$ existiert. Die Aussage zur Beschraenktheit folgt mit einer einfachen Hoelderabschaetzung:

$$\begin{aligned}
\int_Y |Kf(y)|^p dy &= \int_Y |\int_X k(y,x) f(x) dx|^p dy \\
\text{(Hoelder)} \quad &\leq \int_Y \left| \left(\int_X |k(y,x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \right|^p dy \\
&\leq \|f\|_p^p \int_Y \left(\int_X |k(y,x)|^q dx \right)^{p/q} dy \\
&\leq \|f\|_p^p m(Y) (C^q m(X))^{p/q} \\
&= m(Y) C^p m(X)^{p/q}.
\end{aligned}$$

Ziehen der p-ten Wurzel liefert dann

$$\|Kf\|_p \leq \|f\|_p m(Y)^{1/p} C m(X)^{1/q}.$$

Analog sieht man auch, dass der Operator $\widetilde{K}$ beschraenkt und ueberall definiert ist. Da K und $\widetilde{K}$ offenbar formal adjungiert sind, folgt dann die letzte Aussage.

Ende der Vorlesung

Fuer die folgende Charakterisierung fuehren wir noch etwas Notation ein: Ist S eine Teilmenge eines normierten Raumes E so definieren wir den Annihilator von S als

$$S^\perp := \{\varphi \in E' : (\varphi, v) = 0 \ \text{ fuer alle } v \in V\}.$$

Offenbar ist $S^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum.

Bemerkungen.

- Es gilt $S^\perp = \overline{\mathrm{Lin}(S)}^\perp$.
- Es haengt $V^\perp$ davon ab, welcher umgebenden Raum H gewaehlt ist, d.h. $V^\perp = V^{\perp, E}$.

Ausserdem erinnern wir an die kanonische Identifikation von $E' \times F'$ mit $(E \times F)'$ (Uebung) via

$$(\varphi, \psi) \mapsto ((x, y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)).$$

Proposition. *Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F. Dann ist der Graph von T^* gegeben durch*

$$G(T^*) = \{(\varphi, \psi) \in F' \times E' : (\psi, x) - (\varphi, Tx) = 0 \textit{ fuer alle } x \in D(T)\} = (JG(T))^\perp$$

mit $J(x, y) = (-y, x)$. Weiterhin gilt

$$Ker(T^*) = \{\varphi \in F' : \varphi(y) = y \textit{ fuer alle } y \in R(T)\} = R(T)^\perp.$$

Insbesondere ist $R(T)$ dicht genau dann, wenn T^* injektiv ist.

Beweis. Zum Graphen von T^*: Die erste Gleichheit ist klar. Die zweite Gleichheit folgt direkt (nach Identifizieren von $(E \times F)'$ mit $E' \times F'$):

$$\begin{aligned}(\psi, x) - (\varphi, Tx) &= ((\varphi, \psi), (-Tx, x)) \\ &= ((\varphi, \psi), J(x, Tx)).\end{aligned}$$

Zur Aussage ueber den Kern: Nach dem schon bewiesenen ueber den Graphen von T^* gilt

$$Ker(T^*) = \varphi \in F' : (\varphi, 0) \in G(T^*)\} = \{\varphi : (\varphi, Tx) = 0 \text{fuer alle } x \in D(T)\}.$$

Das liefert die Aussage.

Das 'Insbesondere' ist nun klar. □

Folgerung. *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

Beweis. Da der Annihilator immer abgeschlossen ist, ergibt sich aus der vorangehenden Proposition sofort, dass der adjungierte Operator abgeschlossen ist. □

Da jeder adjungierte Operator abgeschlossen ist, ist es nun natuerlich sich zu fragen, wann ein adjungierter Operator sogar ueberall definiert ist.

Proposition. *Sei T ein dicht definerter Operator zwischen Banachraeumen. Dann ist T^* ueberall definiert genau dann, wenn T beschraenkt ist.*

Beweis. Ist T beschraenkt, so koennen wir es eindeutig zu einem beschraenkten Operator auf dem ganzen Banachraum fortsetzen und der Adjungierte dieser Fortsetzung stimmt mit dem Adjungierten von T ueberein. Da der Adjungierte eines beschraenkten, ueberall definierten Operators aber ebenso beschraenkt und ueberall defininiert ist, folgt die gewuensche Aussage.

Ist $D(T^*)$ ueberall definiert, so ist nach der vorangegangenen Folgerung und dem Satz vom abgeschlossenen Graphen der Operator T^* beschraenkt. Damit ist dann auch (kleine Rechnung) T beschraenkt. □

Folgerung. *Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F. Sind T und T^* injektiv, so ist T^{-1} dicht definiert und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Remark. Nach dem schon gezeigten ist T^* injektiv genau dann, wenn T dichtes Bild hat. Ein Beispiel, in dem dies nicht der Fall ist, wird durch den Rechtsshift S auf $\ell^2(\mathbb{N})$ und seinen Adjungierten den Linksshift T auf $\ell^2(\mathbb{N})$ gegeben.

Beweis. Da T^* injektiv ist, ist $R(T)$ dicht. Also ist T^{-1} dicht definiert und $(T^{-1})^*$ existiert.

$(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*$: Sei $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$. Dann gilt

$$\psi = T^*\varphi$$

fuer ein geeignetes $\varphi \in D(T^*)$. Damit folgt fuer alle $y = Tx \in R(T) = D(T^{-1})$ dann

$$(\psi, T^{-1}y) = (\psi, x) = (T^*\varphi, x) = (\varphi, Tx) = (\varphi, y).$$

Damit folgt $\psi \in D((T^{-1})^*)$ mit $(T^{-1})^*\psi = \varphi$.

$D((T^{-1})^*) \subset D((T^*)^{-1})$. Sei $\psi \in D((T^{-1})^*$. Zu zeigen: $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$.
Sei $\varphi := (T^{-1})^*\psi = \overline{\psi \circ T^{-1}}$. (Wenn die von uns angestrebte Aussage ueberhaupt muss dies das richtige φ sein.) Dann gilt:

$$\psi = \overline{\psi \circ T^{-1} \circ T} = \overline{\varphi \circ T} = T^*\varphi \in R(T^*).$$

Das beendet den Beweis. □

Wir beenden den Abschnitt mit einigen Regeln zum Rechnen mit adjungierten Operatoren.

PROPOSITION. *Gilt $S \subset T$ so folgt $T^* \subset S^*$.*

Beweis. Das ist einfach: Sei $\varphi \in D(T^*)$. Dann gilt

$$(\varphi, Sx) = (\varphi, Tx) = (T^*\varphi, x)$$

fuer alle $x \in D(S)$ und damit $\varphi \in D(S^*)$ und $S^*\varphi = T^*\varphi$.) □

PROPOSITION. *Seien S, T Operatoren zwischen normierten Raeumen (so dass die folgenden Operatoren definiert sind).*
(a) Ist $S + T$ dicht definiert, so gilt

$$(S + T)^* \supset S^* + T^*.$$

(b) Ist ST dicht definiert , so gilt $(ST)^* \supset T^*S^*$.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in D(S^* + T^*) = D(S^*) \cap D(T^*)$. Dann ist die Abbildung

$$D(S + T) = D(S) \cap D(T) \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, (T + S)x)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, (T+S)x) = (\varphi, Tx)+(\varphi, Sx) = (T^*\varphi, x)+(S^*\varphi, x) = (T^*\varphi+S^*\varphi, x).$$

Damit ist diese Abbildung stetig und des gilt $\varphi \in D((S + T)^*)$ sowie $(T + S)^*\varphi = T^*\varphi + S^*\varphi$.

(b) Sei $\varphi \in D(T^*S^*) = \{\varphi \in D(S^*) : S^*\varphi \in D(T^*)\}$. Dann ist die Abbildung

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\} \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, STx)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, STx) = (S^*\varphi, Tx) = (T^*(S^*\varphi), x).$$

Damit ist die Abbildung stetig und es gilt $\varphi \in D((ST)^*)$ und $(ST)^*\varphi = T^*(S^*\varphi)$. □

FOLGERUNG. *Fuer beschraenkte Operatoren S, T gilt*

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

und

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition, da die 'kleineren' Operatoren ueberall definiert sind. □

2. Adjungierte Operatoren in Hilbertraeumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir adjungierte Operatoren im Hilbertraum. In diesem Fall koennen wir nach dem Rieszschen Darstellungssatz den Dualraum mit dem Hilbertraum selber identifizieren. Entpsrechend ist der Hilbertraum adjungierte Operator, dann eine Abbildung zwischen den Usprungshilbertraeumen (in der anderen Richtung). Da die Identifikation eines Hilbertraumes mit seinem Dualraum ANTIlinear ist, treten im vergleich zu den Betrachtungen des vorigen Abschnittes an manchen Stellen zusaetzliche Konjugationen auf. Ansonsten geht alles wie gehabt. Im Falle von Hilberraeumem verwendet man ueblicherweise den Hilbertraum Adjungierten.

Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Sei T ein dicht definierte Operator von H_1 nach H_2. Dann ist der Hilbertraum-adjungiert T^*_{HR} definiert durch

$$D(T^*_{HR}) := \{y \in H_2 : \text{ es ex. } x^* \in H_1 \text{ mit } \langle x^*, x \rangle_1 = \langle y, Tx \rangle_2 \text{ für alle } x \in H_1\}.$$

$$T^*_{HR} y = x^*.$$

Bemerkung. Jeder Hilbertraum ist auch ein Banachraum. Der im vorigen Abschnitt definierte Adjungierte liefert dann:

$$D(T^*) = \{\psi \in H_2' : \text{ es ex. } \varphi \in H_1' \text{ mit } (\psi, Tx) = (\varphi, x) \text{ für alle } x \in D(T)\}.$$

Der Hilbertraumadjungierte entsteht dann nach Identifikation von H_1' mit H_1 und H_2' mit H_2 via Rieszschem Darstellungssatz. Da beide Identifikationen antilinear sind, ist dann der resultierende Operator linear.

Notation. Wir werden im Kontext von Hilbertraeumen nur den Hilbertraumadjungierten verwenden und lassen dann das Subskript HR weg.

Erinnerung: Sind H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, so ist auch $H_1 \times H_2$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle (u, v), (r, s) \rangle := \langle u, r \rangle_1 + \langle v, s \rangle_2.$$

(Nachrechnen!). Wir werden verschiedentlich folgende einfache Beobachtung verwenden: Ist U eine unitaere Abbildung zwischen Hilbertraeumen, so gilt $U(V^\perp) = (UV)^\perp$ fuer jeden Unterraum V des Ausgangsraumes.

Damit koennen wir nun den adjungierten Operator charakterisieren (vgl. allgemeine Satz oben).

THEOREM (Charakterisierung adjungierter Operator). *Seien H_1 und H_2 Hilberraeume. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann gilt*

$$G(T^*) = (UG(T))^\perp = U(G(T)^\perp)$$

mit $U : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1, U(x, y) = (y, -x)$. Insbesondere gilt

$$Ker(T^*) = R(T)^\perp.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G(T^*) &= \{(y,x) \in H_2 \times H_1 : \langle y, Tz\rangle_2 = \langle x, z\rangle_1 \text{ fuer alle } (z,Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y,x) \in H_2 \times H_1 : \langle (y,x), (Tz,z)\rangle = 0 \text{ fuer alle } (z,Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y,x) \in H_2 \times H_2 : (y,x) \perp UG(T)\} \\ &= (UG(T))^{\perp}. \end{aligned}$$

Da U offenbar unitaer ist, folgt auch die weitere Gleichung.
Das 'Insbesondere' folgt sofort aus dem ersten Teil: Denn $T^*x = 0$ gilt genau, dann wenn

$$\langle (x,0) \perp UG(T),$$

also

$$\langle x, Tz\rangle = 0$$

fuer alle $z \in D(T)$. □

FOLGERUNG. *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

THEOREM (Injektivitaet von T^*). *Seien H_1 und H_2 Hilberraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_1$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Sind T und T^* injektiv und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Bemerkung. Nach dem vorigen Satz ist T^* injektiv genau dann, wenn T dichtes Bild hat.
Beweis. Sei

$$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1, (x,y) \mapsto (y,x).$$

Dann gilt also $G(T^{-1}) = VG(T)$. Sei U wie im vorigen Satz. Dann gilt (Nachrechnen) $U^{-1}V = V^{-1}U$. Wir wenden nun den vorigen Satz an auf T^{-1}. Dabei werden dann die Rollen von H_1 und H_2 vertauscht und die Abbildung U wird durch U^{-1} ersetzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} G((T^{-1})^*) &= U^{-1}(G(T^{-1})^{\perp}) \\ &= U^{-1}((VG(T))^{\perp}) \\ &= U^{-1}V(G(T)^{\perp}) \\ (U^{-1}V = V^{-1}U) \quad &= V^{-1}UG(T)^{\perp} \\ (\text{voriger Satz}) \quad &= V^{-1}G(T^*) \\ &= G((T^*)^{-1}). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Erinnerung. (Uebung) Ein Operator T heisst *abschließbar*, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. In diesem Fall gibt es eine kleinste abgeschlossene Fortsetzung und diese wird mit $\overline{T}$ bezeichnet. Der Graph von $\overline{T}$ ergibt sich als Schnitt ueber die Graphen aller abgeschlossenen Fortsetzungen. Damit gilt

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}.$$

(Die Abschließbarkeit von T bedeutet gerade, dass $\overline{G(T)}$ ein Graph ist, d.h. ein Element $(0, y)$ genau, dann enthaelt, wenn $y = 0$ gilt.)

$\longleftrightarrow$
Ende der Vorlesung

THEOREM. *Seien H_1 und H_2 Hilberraeume und T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann ist T genau dann abschließbar, wenn T^* dicht definiert ist. In diesem Fall gilt $T^{**} = \overline{T}$.*

Beweis. Ist T^* dicht definiert, so existiert T^{**}, ist abgeschlossen als adjungierter und eine Fortsetzung von T. Insbesondere gilt dann $\overline{T} \subset T^{**}$.
Sei T abschließbar. Sei $x \in D(T^*)^\perp$. Dann gilt natuerlich $(x, 0) \perp G(T^*)$. Damit folgt aus dem vorvorigen Satz

$$(0, x) \in U^{-1}G(T^*)^\perp = U^{-1}(UG(T))^{\perp\perp} = U^{-1}U\overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

(Hier nutzen wir: im ersten Schritt $(x, 0) \perp G(T^*)$ und die Definition von U, im zweiten Schritt den vorvorigem Satz, im dritten Schritt den ueblichen Schluss.) Damit folgt $x = 0$ (da Graph!).
Zur letzten Aussage: Es gilt nach zweimaliger Anwendung des vorvorigen Satz

$$G(T^{**}) = U^{-1}G(T^*)^\perp = U^{-1}(UG(T)^\perp)^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)}.$$

□

FOLGERUNG. *Sei T ein abgeschlossener Operator zwischen Hilbertraeumen. Dann ist der adjungierte T^* dicht definiert und es gilt $T = T^{**}$.*

3. Normale Operatoren im Hilbertraum

In diesem Abschnitt betrachten wir Hilbertraeume und schraenken uns auf die Situation $H_1 = H_2 = H$ ein. Dann gibt es eine besonders wichtige Klasse von Operatoren.

DEFINITION. *Sei H ein Hilbertraum. Ein dicht definierter Operator von H nach H heißt normal, wenn gilt*
- *$D(T) = D(T^*)$ und*
- *$\|Tx\| = \|T^*x\|$ fuer alle $x \in D(T) = D(T^*)$.*

Bemerkungen.
- Gehoert T zu $L(H)$, so ist T genau dann normal, wenn $TT^* = T^*T$ gilt. (Uebung).
- Wichtige Beispiele beschraenkter normaler Operatoren sind unitaere und selbstadjungierte Operatoren.
- Mit T ist auch $T - \lambda I$ normal fuer jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ (wie ein direkte Rechnung zeigt).

FOLGERUNG. *Jeder normale Operator ist abgeschlossen.*

Beweis. Wir wissen schon, dass jeder adjungierte Operator abgeschlossen ist. Nach Konstruktion gilt fuer einen normalen Operator aber $D(T) = D(T^*)$ und $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{T^*}$. Damit folgt die Aussage. □

LEMMA (Charakterisierung Spektrum normaler Operatoren). *Sei T ein normaler Operator im Hilbertraum H. Dann sind fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ aquivalent:*
(i) *$\lambda \in \varrho(T)$.*
(ii) *Es existiert ein $c > 0$ mit $\|(T - \lambda)x\| \geq c\|x\|$ fuer alle x in H.*

Insbesondere gilt also $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn eine Folge (x_n) in $D(T)$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T-\lambda)x_n| \to 0, n \to \infty$.

Bemerkung. Fuer Operatoren, die nicht normal sind, gilt die Aussage im allgemeinen nicht. So erfuellt etwa der Rechts-Shift S auf $\ell^2(\mathbb{N})$ die Gleichung $\|Sx\| = \|x\|$. Damit gilt dann (ii) fuer $\lambda = 0$. Es gehoert aber $\lambda = 0$ zum Spektrum (siehe oben fuer Details).

Beweis. Die Implikation (i)$\Longrightarrow$ (ii) ist klar. Wir zeigen die andere Implikation (ii)$\Longrightarrow$ (i). Offenbar folgt aus (ii), daß $T - \lambda I$ injektiv ist. Es ist also zu zeigen, dass $T - \lambda I$ auch surjektiv ist. Wir zeigen, dass $R(T - \lambda I)$ dicht und abgeschlossen ist: Mit T ist auch $T - \lambda$ normal und es folgt

$$Ker(T-\lambda) = Ker(T^* - \overline{\lambda}).$$

Damit folgt dann aus der allgemeinen Theorie

$$Ran(T-\lambda)^\perp = Ker(T^* - \overline{\lambda}) = Ker(T-\lambda).$$

Es ist also $T - \lambda$ genau dann injektiv, wenn es dichtes Bild hat. Die Abgeschlossenheit des Bildes folgt leicht aus (ii) und der Abgeschlosseheit des Operator (vgl. Betrachtungen zum Spektrum in einem vorigen Kapitel).

Das 'Insbesondere' folgt sofort aus der ersten Aussage. □

Ende der Vorlesung

Bemerkung. Das vorige Lemma besagt gerade, das Spektrum eines normalen Operators T gerade aus *Fasteigenwerten* oder *approximatiiven Eigenwerte* besteht, d.h. aus $E \in \mathbb{C}$ fuer die zu jedem $\varepsilon > 0$ ein normiertes x, der *Fasteigenvektor*, existiert mit

$$\|(T-E)x\| \leq \varepsilon.$$

Eine besonders wichtige Klasse normaler Operatoren fuehren wir jetzt ein.

DEFINITION. *Ein Operator T im Hilbertraum heisst selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.*

Beispiel - Multiplikationsoperatoren Sei $(X, \mu, \mathcal{B})$ ein σ-endlicher Massraum und $t : X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar und M_t der maximale Operator der Multiplikation mit t in $L^2(X,\mu)$. Dann ist der (Hilbertraum)adjungierte von M_t gegeben durch $M_{\overline{t}}$ (Uebung; vgl. Diskussion des Banachraumadjungierten oben). Damit sieht man leicht, dass M_t normal ist. Es ist M_t selbstadjungiert genau dann, t fast ueberall reellwertig ist. Das Spektrum von M_t ergibt sich (siehe oben) als

$$\sigma(M_t) = \text{wesentlicher Wertebereich von } t.$$

Bemerkung. Ein tiefes Resultat (Spektralsatz) besagt, dass jeder normale Operator unitaer equivalent zu einem Multiplikationsoperator ist. Damit sind dann Multiplikatonsoperatoren DIE Beispiele von normalen Operatoren. Wir werden in dieser Vorlesung den Spektralsatz nicht vollstaendig beweisen (aber einige Schritte in diese Richtung machen).

KAPITEL 4

Etwas zum Laplaceoperator im $\mathbb{R}^N$

Wir kennnen schon den Laplaceoperator

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 f(x)$$

fuer $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nun ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ aber kein normierter Raum (und erst recht kein Hilbertraum). In diesem Abschnitt fuehren wir den Laplaceoperator auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ ein. Da gar nicht alle Funktionen in L^2 differenzierbar sind, bedarf es dazu einiger Vorbereitungen. Bei diesen Vorbereitungen lernen wir einige Zusammenhaenge kennen, die auch in anderem Kontext von Bedeutung sind.[1]

1. Exkurs: Falten, Glätten, Approximieren

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Dichtheit von verschiedenen Unterraeumen in L^p. Die Betrachtungen sind im euklidischen Raum angesiedet. Einige Ideen lassen sich aber auch auf eine Vielzahl anderer Situationen übertragen.

Theorem (Approximationssatz). *Es ist $C_c(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ fuer alle $p \in [1, \infty)$.*

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $p = 1$. Es reicht zu zeigen, dass jede Funktion der Form $1_{B_R} f$ mit $R > 0$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^N)$ approximiert werden kann. Da man Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^N)$ durch, Elementarfunktionen, d.h. endliche Linearkombinationenen von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen approximieren kann, reicht es dann also zu zeigen, dass fuer jede messbare Menge A in $B_R(0)$ die Funktion 1_A durch Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^N)$ approxmiert werden kann.
Um das zu zeigen, wenden wir ein entsprechenden Schluessen gaengiges Verfahren an: Wir definieren zunaechst das System der 'guten' Mengen (d.h. der Mengen, fuer die eine entsprechende Approximation gilt). Anschliessend zeigen wir, dass diese System die charakteristischen Eigenschaften der Borel-σ-Algebra erfuellt.
Entsprechend definieren wir

$$\mathcal{B} := \{A \subset B_R(0) \text{ messbar} : \text{es existiert } (\varphi_n) \subset C_c(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \varphi_n \to 1_A \text{ in } L^1\}.$$

[1]Man mag den Eindruck haben, dass wir sehr viel Aufwand treiben, um die Laplaceoperator zu definieren. Dazu ist zu sagen, dass es sich erstens bei dem Laplaceopertor nicht um irgendeinen Operator handelt sondern um DEN Operator und dass, zweitens, die erwaehnten Zusammenhaenge an weiteren Stellen von Interesse sind.

Ohne Einschraenkung koennen (und werden) wir von den in Frage stehenden Folgen (φ_n) folgendes annehmen:

- $0 \leq \varphi_n \leq 1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. (Sonst abschneiden.)
- $\operatorname{supp} \varphi_n \subset B_{R+1}$. (Sonst Multiplizieren mit einem geeigneten φ.)

Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Teilmengen von $B_R(0)$ enthaelt. Damit muss es dann mit der Einschraenkung der Borel-σ-Algebra auf $B_R(0)$ uebereinstimmen und das liefert nach obiger Diskussion die gewuenschte Dichtheit.

Behauptung. Ist $K \subset B_R(0)$ kompakt, so gehoert es zu $\mathcal{B}$. Insbesondere gehoert $B_R(0)$ also zu $\mathcal{B}$.
Bew. Setze

$$d(K,\cdot) : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty),\ d(K,x) = \inf\{d(k,x) : k \in K\}.$$

Es ist das Infimun ein Minimum (da stetige Funktionen auf Kompakte ihr Minimum annehmen). Es ist $d(K,\cdot)$ Liptschitz-stetig, d.h. es gilt

$$|d(K,x) - d(K,y)| \leq d(x,y)$$

(wie man leicht mittels der Dreiecksungleichung sieht). Betrachte nun

$$\varphi_n := (1 - nd(K,\cdot))_+.$$

Dann konvergiert φ_n punktweise gegen 1_K und ist durch 1 beschraenkt und in $B_{R+1}(0)$ getragen. Damit folgt leicht die gewuenschte Aussage.

Ende der Vorlesung

Behauptung. Mit A und B gehoert auch $A \cap B$ zu $\mathcal{B}$.
Bew. Seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen in $C_c(\mathbb{R}^N)$, die gegen 1_A bzw. 1_B in L^1 konvergieren (und die in den beiden oben genannten Punkten genannten Eigenschaften erfuellen). Betrachte nun

$$\chi_n := \varphi_n \psi_n.$$

Mit

$$\chi_n - 1_{A\cap B} = \varphi_n\psi_n - 1_A 1_B = \varphi_n(\psi_n - 1_B) + (\varphi_n - 1_A)1_B$$

folgt dann leicht die gewuenschte Aussage.

Behauptung. Mit A und B gehoert auch $A \setminus B$ zu $\mathcal{B}$.
Bew. Es gilt $1_{A\setminus B} = 1_A - 1_{A\cap B}$. Damit folgt dann die Aussage aus dem schon gezeigten (durch Substraktion der entsprechenden Folgen).

Behauptung. Sind $A_1, \ldots, A_N$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathcal{B}$, so gehoert $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ zu $\mathcal{B}$.
Bew. Das folgt durch Addition der entsprechenden Folgen.

Behauptung. Gehoeren $A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset ...$ zu $\mathcal{B}$, so gehoert auch $A := \cup_N A^{(N)}$ zu $\mathcal{B}$.
Bew. Nach Voraussetzung und dem Satz von der monotonen Konvergenz / dem Satz von Lebesgue gilt $1_{A^{(N)}} \to 1_A$ in L^1. Damit folgt die Aussage sofort.

Behauptung. Es ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra.
Bew. Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, daß $\mathcal{B}$ die Menge $B_R(0)$ enthaelt und abgeschlossen ist unter:

- Relativer Komplementbildung.
- Endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen.

- Abzaehlbaren Vereinigungen aufsteigender Mengen.

Damit ist $\mathcal{B}$ dann auch abgeschlossen unter beliebigen abzaehlbaren Vereinigungen wegen

$$\bigcup_n A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) \cup .....$$

Damit ist dann $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra. Weiterhin gilt folgendes:
Behauptung. Es gehoeren alle (in $B_R(0)$) offenen Teilmengen von $B_R(0)$ zu $\mathcal{B}$.
Bew. Ist $U \subset B_R(0)$ offen, so gilt

$$U = B_R(0) \setminus (B_R(0) \setminus U)$$

und es ist $B_R(0) \setminus U$ kompakt. Damit folgt die gewuenschte Aussage sofort aus den vorangehenden Aussagen.

Insgesamt erhalten wir die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung. Die Aussage des Theorem ist die Approximierbarkeit beliebiger Funktionen in L^p. Im Beweis konstruieren wir genau an einer Stelle explizit eine approximierende Funktion (im Beweis der ersten Behauptung). Diese Konstruktion nutzt lediglich die Metrik (Abstand zu einer kompakten Menge). Der uebrige Teil des Beweises sind dann 'algebraische' Manipulationen. Insbesondere nutzt der Beweis nicht wirklich die spezielle Struktur des Euklidischen Raumes. Er kann fuer alle metrischen Raeume mit kompakten Kugeln genauso gegeben werden.

Unser naechstes Ziel ist es das vorangegangene Theorem auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ zu erweitern. Dazu werden wir beliebige stetige Funktionen durch eine Faltung glaetten.

PROPOSITION. *Fuer $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ beschraenkt und meßbar existiert fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ das Integral*

$$(g * f)(x) := \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy (= (g * f)(x)).$$

Bemerkung. Fordert man zusaetzliche Eigenschaften von f, so kann man bei g auf die Beschraenktheit verzichten. So kann man etwa die Faltung zwischen einer Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und einer meßbaren lokal integrierbaren Funktion g definieren. (Hier bedeutet lokal integrierbar, dass die Einschraenkunt der Funktion auf jedes Kompaktum integrierbar ist.)

Beweis. Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Substitutionsregel ($S : y --> x - y$, $|\det DS| = |(-1)^N| = 1$). Existenz des Integrals folgt, da f zu L^1 gehoert. □

Notation. Man nennt $g * f$ die *Faltung* von g und f.

Die Faltung zweier Funktionen vereinigt 'das Beste' der beiden Funktionen auf sich.

LEMMA (Glaetten durch Falten). *Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ beschraenkt und meßbar. Dann gilt:*
(a) Es ist $f * g$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g)$.
(b) Faellt g schneller als jedes Polynom, so faellt auch $f * g$ schneller als jedes Polynom.

(c) Hat g kompakten Traeger, so hat auch $f * g$ kompakten Traeger.

Beweis. (a) Es reicht die Formel fuer die Ableitung zu zeigen. Wir zeigen das durch Induktion nach $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$. Hier diskutieren wir nur den Fall $|\alpha| = 1$. Zu zeigen ist also :

$$\frac{1}{h}(f * g(x + he_j) - f * g(x)) \to (\partial_j f) * g(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(f * g)(x + he_j) - (f * g)(x) &= \int (f(x + he_j - y) - f(x - y))g(y)dy \\
&= \int g(y)(\int_0^h \partial_j f(x + se_j - y)ds)dy \\
&= \int_0^h \left(\int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy \right) ds.
\end{aligned}$$

Es ist nun die Funktion $s \mapsto \int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy$ stetig in s (!). Daher folgt aus dem HDI die Behauptung (a).
Noch zu zeigen (!): Ueblicher Schluss: Ausserhalb einer (grossen) Kugel ist das Integral sowieso null Auf dieser Kugel hat man gleichmaessige Konvergenz.
(b) Offenbar gilt

$$(1 + |x + y|^2) \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2).$$

Damit kann man abschaetzen

$$\begin{aligned}
|(1 + |x|^2)^m f * g(x)| &= |\int (1 + |x|^2)^m f(x - y)g(y)dy| \\
&\leq \int (1 + |x - y + y|^2)^m |f(x - y)||g(y)|dy \\
&\leq 2^m \int (1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)|(1 + |y|^2)^N |g(y)|dy.
\end{aligned}$$

Wegen $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ist der Faktor $(1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)|$ beschraenkt. Da g schneller faellt als jedes Polynom ist

$$(1 + |y|^2)^m |g(y)| \leq (1 + |y|)^{-N-1}$$

integrierbar. Das liefert die Behauptung.
(c) Ist f in K getragen und g in L so ist $f * g$ im kompakten $K + L$ getragen. (Denn, damit

$$f * g(x) = ... \int f(y)g(x - y)dy$$

nicht verschwindet, muss auf jeden Fall ein $y \in K$ mit $x - y \in L$ existieren. Damit muss dann also

$$x \in y + L \in K + L$$

gelten. Das zeigt die gewuenschte Aussage.) □

Ende der Vorlesung

Unser Ziel ist das bei der Approximation anzuwenden in folgender Weise: Sei ein zu approximierendes f gegeben. Waehle nun Funktionen δ_n mit

- $\delta_n * f \to f$, $n \to \infty$.

- δ_n (und damit dann auch $\delta_n * f$) ist eine 'schoene' Funktion.

Hier sind die Details:

DEFINITION (δ-Folge). *Eine Folge von stetigen Funktionen $\delta_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$ heisst δ-Folge, wenn gilt:*

- $\int \delta_n d\lambda = 1$ *fuer alle natuerlichen Zahlen n. (Normiert)*
- $\int_{U_R(0)^c} \delta_n d\lambda \to 0,\ n \to \infty$ *fuer jedes $R > 0$. (Konzentrationseigenschaft-Lebesguemaß)*

Bemerkung - Konzentrationseigenschaft und Normierung.

- Gegeben die Normierung laesst sich die Konzentrationseigenschaft auch formulieren als
$$\int_{U_R(0)} \delta_n d\lambda \to 1,\ n \to \infty.$$
- Oft wird auch die staerkere Konzentrationseigenschaft $\operatorname{supp}(\delta_n) \subset B_{1/n}(0)$ gefordert.
- Fuer die von uns jetzt angestrebeten Anwendungen koennte man die Forderungen noch weiter abschwaechen zu $\delta_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ mit
  - $\int \delta_n d\lambda = 1$ (fuer alle $n \in \mathbb{N}$).
  - $\int_{U_R(0)^c} |\delta_n| d\lambda \to 0, n \to \infty$ fuer jedes $R > 0$.

Bemerkung - Existenz einer δ-Folge. Es stellt sich natuerlich die Frage nach der Existenz einer solchen δ-Folge. Ein Beispiel ist wie folgt gegeben: Sei $\varepsilon > 0$. Definiere
$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$$
durch $\varphi_\varepsilon(x) = c_\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x|^2}}$ fuer $|x| < \varepsilon$ und $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ sonst (wobei $c_\varepsilon > 0$ so gewaehlt ist, dass $\int \varphi_\varepsilon d\lambda = 1$ gilt). Dann gehoert jedes φ_ε zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (vgl. Analysis I). Weiterhin gilt offenbar
$$\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$$
und damit ist dann $\delta_n := \varphi_{1/n}$ eine δ-Folge in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA (Gleichmaeßige Konvergenz $\delta_n * f \to f$). *Sei (δ_n) eine δ-Folge. Sei $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ beschraenkt und messbar. Dann konvergiert $\delta_n * f$ gegen f in allen Stetigkeitspunkten von f. Ist f gleichmaeßig stetig, konvergiert $\delta_n * f$ gleichmaessig gegen f.*

Bemerkung. Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ (und sogar jede Funktion in $C_0(\mathbb{R}^N)$) ist gleichmaeßig stetig und beschraenkt.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Konvergenz in Stetigkeitspunkten: Sei x ein Stetigkeitspunkt von f. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. (Zu zeigen $|(\delta_n * f)(x) - f(x)| \le \epsilon$ fuer alle genuegend grossen n.)

Da x ein Stetigkeitspunkt von f ist, gibt es ein $R > 0$ mit
$$|f(x-y) - f(x)| \le \epsilon/2$$

fuer alle $y \in U_R(0)$. Damit rechnen wir nun unter zuhilfenahme eines kleinen Trick:

$$\begin{aligned}
& |(\delta_n * f)(x) - f(x)| \\
= & \left| \int \delta_n(y) f(x-y) d\lambda(x) - f(x) \right| \quad \text{(Definition } \delta_n * f\text{)} \\
= & \left| \int \delta_n(y)(f(x-y) f(x)) d\lambda(y) \right| \quad \text{(Trick - } \delta_n \text{ normiert)} \\
\leq & \int_{U_R(0)} \delta_n(y) |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) + \int_{(U_R(0))^c} \delta_n(y) |f(x-y) - f(x)| d\lambda(y) \\
\leq & \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \int_{U_R(0)^c} \delta_n(y) d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Konzentrationseigenschaft der δ-Folge wird der das Integral im zweiten Term beliebig klein fuer genuegend grosse n. Das liefert die Aussage.

Wir betrachten nun gleichmaessig stetige f: Da f gleichmaeßig stetig ist, koennen wir nun ein $R > 0$ waehlen mit

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

fuer alle $y \in U_R(0)$. Damit koennen wir den obigen Beweis simultan fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ fuehren. □

FOLGERUNG. *Es ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N, \lambda)$ fuer alle $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Nach dem Approximationstheorem ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in L^p. Es reicht also zu zeigen, dass jedes $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ durch Funktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in L^p approximiert werden kann. Sei nun $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ beliebig. Sei δ_n eine δ-Folge aus C_c^∞ mit $\text{supp}(\delta_n) \subset B_1(0)$. Dann gehoert $\varphi_n := \delta_n * \varphi$ nach dem Glaettungslemma zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert f_n gleichmaessig gegen f. Weiterhin sind die Traeger der f alle in dem Kompaktum $K = \text{supp}(f) + B_1(0)$ enthalten. Damit konvergieren also die f_n in L^p gegen f. □

Bemerkung - Approximation in L^p. Im obigen Approximationslemma haben wir Funktionen punktweise (in den Stetigkeitspunkten) approximiert. Tatsaechlich kann man mit δ-Folgen auch in L^p approximieren: Gehoert f zu $L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $1 \leq p < \infty$ und ist (δ_n) eine δ-Folge mit Traeger von δ_n enthalten in B_1, so konvergiert $\delta_n * f$ in L^p gegen f. Den Beweis ueberlassen wir als Uebung. (Hinweis: Fuer $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ folgt die gewuenschte Aussage aus obigem Approximationslemma. Solche f sind aber dicht in L^p.)

2. Erinnerung: Die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Fouriertransformation. Weitere Details und Beweise finden sich in den Lehrbuechern oder auch den Notizen zur Vorlesung Analysis III (Lenz): Wir beginnen mit einer Vorschau: Fuer geeignete Funktionen f definiert man

$$Ff : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, Ff(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Das kann man als eine (verallgemeinerte) Linearkombination von Wellen $x \mapsto e^{-ixy}$ gemäß einer Dichte f ansehen. Entsprechend spielt Fouriertransformation bei allen Arten von Untersuchungen von Wellen eine Rolle. Die Fouriertransformation ist dann invertierbar mit Inverser gegeben durch

$$F^{-1}g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} g(y) dy.$$

Man kann also aus der Ueberlagerung von Wellen wieder die Dichte zurueckgewinnnen und umgekehrt. Hier steht natuerlich xy fuer

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j,$$

d.h. es ist

$$e^{ixy} = e^{i\sum_{j=1}^N x_j y_j}, \; e^{-ixy} = e^{-i\sum_{j=1}^N x_j y_j}.$$

Die Fouriertransformation vertauscht Differentiation mit Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen und daher ruehrt ihre Bedeutung in der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen.

Wir machen das nun praezise. Dazu *erinnern* wir zunaechst an die Multiindexnotation. Ein Multiindex der Dimension N ist ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Fuer einen solchen Multiindex definiert man

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j \;\text{ Betrag oder Laenge des Multiindex}$$

und die Funktion

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha := \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} \;\text{ fuer } x \in \mathbb{R}^N.$$

Diese Funktionen bilden eine Basis der Vektorraumes der Polynome. Weiterhin assoziiert man zu einem Multiindex α den Operator M_α der Multiplikation mit x^α, d.h.

$$M_\alpha f = x^\alpha f$$

fuer $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ und den Operator D^α der α-Ableitung

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial_j}\right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^N D_j^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

mit $D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial_j}$. Dieser Operator wirkt auf ein beliebig oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ in der schon aus dem zweiten Semester bekannten (induktiv definierten) Weise durch

$$D^0 f = f \;\; D^{\alpha+e_j} := D_j(D^\alpha f)$$

(fuer die Standardorthonormalbasis e_j, $j = 1, \ldots, N$, in $\mathbb{R}^N$). (Hier heisst eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar, wenn sowohl Realteil als auch Imaginaerteil von f beliebig oft differenzierbar sind.)

Der *Schwartzsche Raum* (nach Laurent Schwartz) $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ der schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ ist der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass zu zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein $C = C_{\alpha,\beta}(f)$ existiert mit

$$|x^\beta||D^\alpha f(x)| \leq C$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$. Eine aequivalente Charakterisierung definiert den Schwartzraum als diejenigen beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, fuer die gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^p |D^\alpha f(x)| < \infty$$

fuer alle $p \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Es ist nicht schwer zu sehen (Uebung), dass der Raum $\mathcal{S}$ invariant ist under Anwendung von D^α und M_α (d.h. fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ gehoeren auch $D^\alpha f$ und $M_\alpha f$ zu $\mathcal{S}$ fuer jeden Multiindex α).

Fuer $f \in \mathcal{S}$ existiert

$$g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$$

fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ und die Funktion $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto g(x)$, ist stetig und beschraenkt. Fuer $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformation Ff von f durch $Ff(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} e^{-ixy} f(y)dy$.
Notation. Man schreibt auch $\widehat{f}$ statt Ff.

THEOREM. *(a)* $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *ist bijektiv.*
(b) $D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} FM_\alpha f$ *und* $M_\alpha Ff = FD^\alpha f$ *fuer alle* $f \in \mathcal{S}$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$*.*

Bemerkung. Es gilt $F^{-1}f(x) = Ff(-x) = \int e^{ixy} f(y)dy$. Insbesondere folgt also $F^2 f(x) = f(-x)$ und $F^4 f = f$, also auch $F^{-1} = F^3 = F^2 F$.

Beispiel/Anwendung. Es gilt

$$-\Delta = F^{-1} M_{|x|^2} F \text{ auf } \mathcal{S}$$

(d.h. $-\Delta f = F^{-1}(|x|^2 Ff)$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$.)
Bew. Das folgt aus dem vorigne Theorem:

$$\Delta = F^{-1} F \Delta = F^{-1} M_{|x|^2} F.$$

(Dabei wird im ersten Schritt (a) und im zweiten Schritt (b) verwendet.)

Diese Anwendung ist fundamental. Sie zeigt, dass der (einzige) Operator, der uns interessiert, durch die Fouriertransformation umgewandelt wird in den (einzigen) Typ von Operator, den wir verstehen.

Fuer die weiteren Betrachtungen brauchen wir noch folgende Formel.

PROPOSITION (Parsevalsche Gleichung fuer $\mathcal{S}$). *Fuer* $f \in \mathcal{S}$ *gilt die Gleichung*

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |Ff(x)|^2 dx.$$

Eine Deutung ist wie folgt moeglich: Ist e_α eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes, so gilt fuer $f = \sum c_\alpha e_\alpha$ dann

$$\|f\|^2 = \sum |c_\alpha|^2.$$

Hier haben wir es sinngemaess mit einer aehnlichen Formel zu tun. Denn wegen

$$f(x) = F^{-1}Ff(x) = \int e^{ixy} Ff(y)dy,$$

koennen wir uns die $Ff(y)$ als die Koeffizienten von f in der Entwicklung nach einer 'verallgemeinerten' Orthonormalbasis e^{ixy}, $y \in \mathbb{R}^N$, vorstellen. Die Formel liefert dann, dass - wie im Falle echter Hilbertraumbasen - die L^2-Norm von f als verallgemeinerte Summe (d.h. Integral) der Quadrate der Koeffizienten gegeben ist.

$\longleftrightarrow$ Ende der Vorlesung

3. Die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$

In den vergangenen beiden Abschnitte haben wir

- die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$,
- Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in L^2,

gelernt. Damit koennen wir nun die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ einfuehren.

Theorem. *Es gibt genau eine stetige Abbildung*

$$F_{L^2} : L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$$

mit $F_{L^2} f = Ff$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$. Diese Abbildung ist unitaer. Die Inverse von F_{L^2} ist gegeben durch die Abbildung $f \mapsto F_{L^2} f(-x)$.

Beweis. Wie im vorigen Abschnitt diskutiert ist die Abbildung $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ is bijektiv und isometrisch (auf $\mathcal{S}$ als Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^N)$). Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in L^2 ist und offenbar $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt, folgt dann sofort, dass man es eindeutig zu einer stetigen Abbildung fortsetzen kann und diese Abbildung unitaer (d.h. isometrisch und surjektiv) ist.
Betrachte nun die Abbildung

$$G : L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \lambda), f \mapsto f(-\cdot).$$

Dann ist offenbar G linear und unitaer. Damit ist dann also $G \circ F_{L^2}$ unitaer. Weiterhin haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dass $G \circ F$ (auf $\mathcal{S}$) mit dem Inversen von F uebereinstimmt.
Nimmt man dies mit der Definition von F_{L^2} zusammen, so folgt, dass $G \circ F_{L^2}$ das Inverse zu F_{L^2} ist. $\square$

Notation. Wir schreiben (meist) F statt F_{L^2}.

4. Der Laplaceoperator

In diesem Abschnitt fuehren wir nun den Laplaceoperator auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^N)$ ein.

Sei M_2 der maximale Operator der Multiplikation mit $|x|^2$ in $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann ist M_2 ein abgeschlossener selbstadjungierter Operator (s.o.) und sein Spektrum ist gegeben durch

$$\sigma(M_2) = \text{Bild}|\cdot|^2 = [0, \infty).$$

Weiterhin hat M_2 keine Eigenwerte.

DEFINITION. *Fuer jedes $p \in [1, \infty)$ definieren wir den Sobolevraum H^p durch*

$$H^p := \{f \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) : (1 + |\cdot|^2)^{p/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)\}.$$

FOLGERUNG. *Es gilt dann also*

$$H^2 = \{f \in L^2 : \widehat{f} \in D(M_2)\}.$$

THEOREM. *Der Operator $L := F^{-1} M_2 F$ ist selbstadjungiert mit Definitionsbereich H^2. Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$F^{-1} M_2 F = -\Delta f.$$

Damit ist L also eine selbstadjungierte Fortsetzung von $-\Delta$ auf $\mathcal{S}$.

Beweis. Wir wissen schon, dass M_2 selbstadungiert ist. Da F unitaer ist, folgt die Selbstadjungiertheit von L sofort. Der Definitionsbereich ergibt sich aus der vorangehenden Folgerung als H^2. Die weiteren Aussagen folgen aus den schon bekannten Aussagen zur Fouriertransformation. $\square$

Bemerkung. (Uebung) Es ist L sogar die einzige selbstadjunigte Forsetzung von $-\Delta$ auf $\mathcal{S}$. Tatsaechlich ist L sogar *wesentlich selbstadjungiert*, d.h. die einzige selbstadjungierte Fortsetzung der Einschraenkung von L auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Es gibt also genau einen selbstadjungierten Operator der

$$-\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzt. Es spielt wesentliche Selbstadjungiertheit eine gewisse Rolle in der Quantenmechank. Dabei werden die physikalisch interessanten Groessen, die sogenannten Observablen, durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben. Oft ist nun von diesen Operatoren 'bekannt', wie sie auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ wirken. Ist der Operator dann wesentlich selbstadjungiert, so ist er durch diese Wirkung dann eindeutig bestimmt.

FOLGERUNG. *Es gilt $\sigma(L) = [0, \infty)$ und es hat L keine Eigenwerte.*

Im $\mathbb{R}^N$ gibt noch eine Moeglichkeit die Sobolevraeume H^p durch Existenz schwacher Ableitungen zu charakterisieren. Das lernen wir nun kennen.

LEMMA ($H = W$). *Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gegeben. Dann gilt $f \in H^p$ genau dann, wenn es zu jedem Multiindex α mit $|\alpha| \le p$ ein $g_\alpha \in L^2$ gibt mit*

$$\int f \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int g_\alpha \varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (d.h. es gilt $\partial^\alpha f = g_\alpha$ im schwachen Sinne).

Beweis. Man macht sich zunaechst klar, dass man in der Aussage die $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ durch $\varphi \in \mathcal{S}$ ersetzen darf (Uebung). Ebenso darf man natuerlich φ durch $\overline{\varphi}$ ersetzen. Anschliessend folgt die Aussage einfach durch Anwenden der Fouriertransformation auf beiden Seiten:

$$\int f\partial^\alpha\overline{\varphi}dx = \langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle F(f), (-i)^{|\alpha|}M_\alpha F(\varphi)\rangle = \int (i)^{|\alpha|}M_\alpha F(f)\overline{F(\varphi)}dk$$

und

$$\int g_\alpha\overline{\varphi}dx = \langle g_\alpha, \varphi\rangle = \langle F(g_\alpha), F(\varphi)\rangle = \int F(g_\alpha)\overline{F(\varphi)}dk.$$

Vergleich liefert

$$i^{|\alpha|}M_\alpha F(f) = F(g_\alpha) \text{ d.h. } g_\alpha = F^{-1}(i^{|\alpha|}M_\alpha F(f)).$$

Damit folgt die gewuenschte Aquivalenz einfach. □

Ein wesentlicher Vorteil der Betrachtung mit schwachen Ableitungen ist, dass diese auch auf Teilmengen des Euklidischen Raumes moeglich sind. Fuer solche Teilmengen hat man im allgemeinen keine Moeglichkeit der Fouriertransformation.

Bemerkung. Ist $P(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{|\alpha|\leq K} c_\alpha x^\alpha$ ein beliebiges Polynom vom Grad hoechstens K in N- Variablen, so definiert man den Operator $P(D)$ auf $\mathcal{S}$ durch

$$P(D)f := \sum_{|\alpha|\leq K} c_\alpha D^\alpha f.$$

Dann gilt nach dem bisher gezeigten

$$F_{\mathcal{S}}P(D)u = PF_{\mathcal{S}}u$$

fuer alle $u \in \mathcal{S}$. Entsprechend laesst sich dann der Operator $P(D)$ auf $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ definieren durch

$$P(D) = F^{-1}M_P F.$$

Damit ist also $P(D)$ unitaer equivalent zu einem Multiplikationsoperator und es laesst sich ein Großteil der obigen Erwaegungen verallgemeinern. Dabei spielt es dann eine grosse Rolle, ob der Kehrwert des Polynoms gebildet werden kann. Das fuehrt auf die Theorie *elliptischer Operatoren.*

Ende der Vorlesung

KAPITEL 5

Der Lebesguesche Differentiationssatz und Anwendungen

In diesem Abschnitt betrachten wir den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$ mit dem Lebesguemaß λ. Es wird um komplexe Maße der Form

$$\mu = f\lambda : \text{Borel-messbare Mengen} \longrightarrow \mathbb{C}, E \mapsto \mu(E) := \int 1_E f d\lambda,$$

mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gehen.
Das Ziel ist es fuer solche Maße μ die Funktion f, die sogenannte *Radon-Nikodym Ableitung von μ bzgl. λ*, als Grenzwert auszurechnen via

$$f(x) = D\mu(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}.$$

Es wird sich herausstellen, daß dies fuer viele x tatsaechlich moeglich ist. Wir brauchen dazu einige Vorbereitungen.

Zur Einstimmung beginnen wir mit folgender Aussage (deren Beweis wir als **Uebung** lassen).

Saetzchen. Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$. Dann sind fuer $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen aequivalent:

- Es ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = c$.
- Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit
$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - c\right| < \varepsilon$$
fuer alle Intervalle I um x mit $0 < |I| < \delta$.

(Der Beweis nutzt die folgenden beiden Beobachtungen:

- Fuer $z_1 < z_2$ und $I = [z_1, z_2)$ gilt $\mu(I) = f(z_2) - f(z_1)$.
- Fuer $z_1 < x < z_2$ gilt

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(x)}{z_2 - x}\frac{z_2 - x}{z_2 - z_1} + \frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1}\frac{x - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Damit folgt die Aequivalenz einfach.)

Wir fuehren nun die noetige Notation ein, die wir im Rest des Abschnittes verwenden werden.

Notation. Wir setzen

$$U_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\}.$$

Weiterhin setzen wir fuer ein komplexes Maß μ auf $\mathbb{R}^N$ und $r > 0$ die Quotientenfunktion

$$(Q_r\mu)(x) := \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

sowie (falls fuer $x \in \mathbb{R}^N$ der Grenzwert existiert)

$$D\mu(x) = \lim_{r\to 0}(Q_r\mu)(x).$$

Das wesentliche Hilfsmittel bei der Untersuchung von Q_r wird die Maximalfunktion sein: Fuer ein positives (endliches) Maß μ definiert man die Maximalfunktion durch

$$(M\mu)(x) := \sup_{0<r<\infty}(Q_r\mu)(x)$$

und fuer ein komplexes Maß μ definiert man

$$(M\mu)(x) := (M|\mu|)(x).$$

(Einnerung: Hier ist die *totale Variation* $|\mu|$ von μ das kleinste positive Mass ν mit $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ fuer alle messbaren Mengen E.)

Bemerkung. Es ist plausibel, daß die Maximalfunktion bei der Untersuchung der Q_r eine wichtige Rolle spielt, da sie simultan alle r erfaßt. Auch beachte man, dass in gewisser Weise nur die kleinen Werte von r interessant sind, da fuer die großen Werte von r die Werte $\mu(U_r(x))$ durch $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ beschraenkt sind, waehrend $\lambda(U_r(x))$ gegen ∞ konvergiert.

1. Überdeckungslemma und Maximalfunktion

In diesem Abschnitt studieren wir einfache Eigenschaften der Maximalfunktion und lernen eine grundlegendes Hilfsmittel fuer unsere (und andere) Betrachtungen kennen.

Proposition (Unterhalbstetigkeit der Maximalfunktion). *Es ist $M\mu$ unterhalbstetig (d.h. $\{x : M\mu(x) > s\}$ ist fuer jedes $s \in \mathbb{R}$ offen) und insbesondere ist $M\mu$ meßbar.*

Beweis. Sei ohne Einschraenkung μ ein positives Maß und sei

$$U := \{x : M\mu(x) > s\}$$

fuer ein $s \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: U ist offen.

Sei $x \in U$ beliebig. Dann existiert also ein $r > 0$ und $t > s$ mit $\mu(U_r(x)) = t\lambda(U_r(x))$. Fuer $\delta > 0$ genuegend klein und $y \in U_\delta(x)$ gilt dann:

- $U_{r+\delta}(y) \supset U_r(x)$ (das gilt sogar fuer alle $\delta > 0$).
- $\lambda(U_{r+\delta}(y) < \frac{t}{s}\lambda(U_r(x))$ (das gilt fuer genuegend kleine $\delta > 0$).

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\mu(U_{r+\delta}(y) &\geq \mu(U_r(x))\\ &= t\lambda(U_r(x))\\ &> s\lambda(U_{r+\delta}(y)).\end{aligned}$$

(Hier wird die erste Eigenschaft von δ in der ersten Ungleichung genutzt und die zweite Eigenschaft im letzten Schritt.) Insgesamt erhaelt man also fuer alle $y \in U_\delta(x)$

$$\mu(U_{r+\delta}(y)) > s\lambda(U_{r+\delta}(y))$$

und damit $y \in U$. $\square$

Bemerkung. Der Beweis nutzt eine Stetigkeitseigenschaft des Lebesguemaßes und die Monotonie eines jeden Maßes.

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Hilfsmittel in diesem Abschnitt (und in anderen Kontexten).

Lemma (Ueberdeckungslemma). *Sei W die Vereinigung von Kugeln $U_{r_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *Die $U_{r_i}(x_i)$, $i \in S$, sind paarweise disjunkt.*
- *Es gilt $W \subset \bigcup_{i \in S} U_{3r_i}(x_i)$.*
- *$\lambda(W) \leq 3^N \sum_{i \in S} \lambda(U_{r_i}(x_i))$.*

Bemerkung. Entscheidend sind die beiden ersten Punkte. Diese gelten fuer allgemeine metrische Raeume. Der dritte Punkt folgt aus den beiden ersten Punkten. Er nutzt eine Skalierungseigenschaft des Lebesguemaßes. Entsprechend gilt das Lemma (und damit die meisten der folgenden Aussagen dieses Abschnittes) in beliebigen metrischen Raeumen, **wenn** das zugrundeliegende Maß eine entsprechende Skalierungseigenschaft hat. Speziell braucht man, daß das Volumen von Kugeln mit dem dreifachen Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaetzt werden kann. Natuerlich ist das erfuellt, wenn das Volumen von Kugeln mit dem doppelten Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaetzt werden kann. Das ist unter dem Namen 'Volumenverdoppelung' bekannt.

Beweis. Der dritte Punkt folgt aus dem zweiten Punkt und einfachen Eigenschaften des Lebesguemaßes. Wir zeigen nun Existenz eines S, das die beiden ersten Punkte erfuellt. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir

$$U_j := U_{r_j}(x_j)$$

fuer $j = 1, \ldots, n$.

Wir sortieren zunaechst die Kugeln nach Groeße um, so daß gilt

$$r_1 \geq r_2 \geq .... \geq r_n.$$

Wir setzen $i_1 := 1$. (Die Menge S wird als $\{i_1, \ldots\}$ gegeben werden.) Wir entfernen alle $j > i_1$ mit $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$.

Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_1} (nach Konstruktion).
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_1}}(x_{i_1})$ enthalten (da $r_{i_1} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$).

Wenn noch Kugeln uebrig sind, setzen wir i_2 als den kleinsten noch uebrigen Index. Dann gilt also inbesondere $U_{i_1} \cap U_{i_2} = \emptyset$. Wir entfernen nun alle Kugeln (mit Index $j > i_2$) mit

$$U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset.$$

Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_2} (nach Konstruktion) und natuerlich weiterhin auch zu U_{i_1}.
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_2}}(x_{i_2})$ enthalten (da $r_{i_2} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset$).

Wir iterieren nun diesen Schritt immer wieder solange noch Kugeln ueberig sind. Da es nur endlich viele Kugeln gibt, endet dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten. Wir setzen dann

$$S := \{i_1, ...\}.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Als Konsequenz aus dem Ueberdeckungslemma koennen wir nun folgendes Maximaltheorem beweisen.

Theorem (Maximaltheorem). *Sei μ ein komplexes Maß in $\mathbb{R}^N$. Dann gilt fuer jedes $s > 0$*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^N : M\mu(x) > s\}) \leq 3^N |\mu|(\mathbb{R}^N)\frac{1}{s}.$$

Bemerkung. Das Theorem gibt eine praezise Information, wie die Maximalfunktion fuer grosse s klein wird. Dabei geht von μ nur die Gesamtmaße ein und es spielt ansonsten nur die lediglich dimensionsabhaengige Konstante 3^N eine Rolle. In diesem Sinne ist das Theorem sehr universell.

Beweis. Setze $U := \{x : M\mu(x) > s\}$. Dann ist U offen (s.o.). Sei $K \subset U$ eine beliebige kompakte Menge. Zu jedem $x \in K$ existiert dann eine Kugel U_x (mit Mittelpunkt x) und

$$(*) \quad |\mu|(U_x) > s\lambda(U_x).$$

Da K kompakt ist, kann man es mit endlich vielen solcher Kugeln ueberdecken. Nach dem vorigen Lemma koennen aus diesen endliche vielen Kugelen, dann Kugeln $U_1, \ldots, U_k$ gewaehlt werden mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Die U_j, $j = 1, \ldots, k$, sind paarweise disjunkt.
- $\lambda(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^k \lambda(U_j)$.

Damit gilt also:

$$\begin{aligned}
\lambda(K) &\leq 3^N \sum_{j=1}^{k} \lambda(U_j) \\
(*) \qquad &\leq 3^N \sum_{j=1}^{k} \frac{|\mu|(U_j)}{s} \\
&= \frac{3^N}{s} \sum_{j=1}^{k} |\mu|(U_j) \\
(U_j \text{ disjunkt}) \qquad &= \frac{3^N}{s} |\mu|(\bigcup_{j=1}^{k} U_j) \\
&\leq \frac{3^N}{s} |\mu|(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

(Es ist $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ endlich, da es sich um ein komplexes Maß handelt). Wir waehlen nun kompakte Teilmengen K_n von U mit

$$K_n \subset K_{n+1} \text{ und } \bigcup_n K_n = U.$$

(Zum Beispiel:

$$K_n := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n\} \cap \{y \in U : dist(y, U^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Das ist kompakt als Schnitt einer kompakten Menge mit einer abgeschlossenen Menge und die Vereinigung dieser K_n ist U, da U offen ist.) Dann gilt aufgrund von uns schon bekannte Saetzen zur 'Stetigkeit' von Maßen

$$\lambda(U) = \lim_n \lambda(K_n) \leq \frac{3^N}{s} |\mu|(\mathbb{R}^N).$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Ende der Vorlesung

2. Lebesguepunkte und Lebesguescher Differentiationssatz

Wir kommen nun zur Anwendung auf Maße der Form $\mu = f\lambda$ mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Wir definieren fuer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ $Mf := M(f\lambda)$ d.h.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y)| d\lambda(y)$$

fuer $x \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt also

$$Mf = M|f\lambda| = M|f|\lambda.$$

(Hier folgt die erste Gleichung nach Definition von M fuer komplexe Maße und die zweite folgt aufgrund des oben gezeigten $|f\lambda| = |f|\lambda$.) K
Weiterhin gilt dann offenbar fuer die Gesamtmaße der totalen Variation von $\mu = f\lambda$

$$|\mu|(\mathbb{R}^N) = (|f|\lambda)(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\lambda = \|f\|_1.$$

FOLGERUNG. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann gilt fuer $s > 0$*

$$\lambda(\{x : Mf(x) > s\}) \leq \frac{3^N}{s} \|f\|_1.$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorangehenden Theorem. □

Bemerkung - schwache L^1-Funktionen und Maximalfunktion.

- Eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *schwache* L^1 - *Funktion*, wenn gilt
$$\lambda(\{x : |g(x)| > s\}) \leq \frac{constant}{s}$$
fuer alle $s > 0$. Damit besagt die Folgerung also, daß Mf eine schwache L^1 - Funktion ist fuer jedes $f \in \mathcal{L}^1$.
- Es ist jede $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion f eine schwache L^1 - Funktion. Denn mit $E_s := \{x : |f(x)| > s\}$ gilt offenbar $s1_{E_s} \leq |f|$ und damit
$$s\lambda(E_s) = \int s1_{E_s} d\lambda \leq \int_{E_s} |f| d\lambda \leq \int |f| d\lambda = \|f\|_1.$$
Es gibt schwach - L^1 - Funktionen, die nicht in L^1 sind. Dazu gehoert zum Beispiel (fuer $N = 1$) die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 1/|x| \text{ fuer } x \neq 0$$
und $f(0) = 0$. Dann gilt
$$E_s = \{x : |f(x)| \geq s\} = [-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}] \setminus \{0\}$$
und damit
$$\lambda(E_s) = \frac{2}{s}.$$
- Fuer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ mit $f \neq 0$ ist die Funktion Mf keine $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion. (Uebung. Idee: Verschwindet f zum Beispiel auf der 1 Kugel um den Ursprung nicht identisch, so folgt $Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^N}$ fuer grosse x. Damit ist Mf nicht integrierbar.)

DEFINITION (Lebesguepunkt). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gegeben. Ein $x \in \mathbb{R}^N$ mit*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda = 0$$

heißt Lebesguepunkt von f.

Bemerkungen.

- Jeder Stetigkeitspunkt von f ist ein Lebesguepunkt (wie man sich leicht klarmacht).
- Ist f nicht stetig, so ist - a priori - gar nicht klar, daß es Lebesguepunkte gibt.
- In jedem Lebesguepunkt x existiert (aufgrund der Dreiecksungleichgung) die Ableitung $D\mu(x)$ von $\mu = f\lambda$ und stimmt mit $f(x)$ ueberein (wie man leicht sieht; vergleiche auch entsprechenden Schluss weiter unten).

THEOREM (Fast jeder Punkt ist Lebesguepunkt). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann ist λ - fast jedes x ein Lebesguepunkt (von f).*

Beweis. Fuer $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N$ definieren wir

$$T_r f(x) := \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda.$$

Weiterhin sei

$$Tf := \limsup_{r \to 0} T_r f.$$

Wir zeigen $Tf(x) = 0$ fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Idee. Wir zerlegen $f = g + h$ in $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und h mit $\|h\|_1$ klein. Dann gilt $Tf \leq Tg + Th$ sowie

- $Tg = 0$ (da g stetig ist)
- Th klein (nach Maximaltheorem, da h kleine Norm hat).

Hier sind die Details:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $C_c(\mathbb{R}^N)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$, ist existiert ein $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$, so daß fuer $h = f - g$ gilt

$$\|h\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Konstruktion gilt $f = g + h$. Damit folgt (nach einer kleiner Rechnung)

$$Tf \leq Tg + Th.$$

Wir behandeln nun Tg und Th getrennt:

Aufgrund der Stetigkeit von g gilt $Tg = 0$. Fuer Th folgt aus

$$T_r h(x) = \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h - h(x)| d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h| d\lambda + |h(x)|$$

dann nach Bilden von $r \to 0$

$$Th(x) \leq Mh(x) + |h(x)|.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$Tf(x) \leq Mh(x) + |h|(x).$$

Aus dieser Abschaetzung folgt nun fuer jedes $s > 0$

$$(*) \quad \{x : Tf(x) > 2s\} \subset \{x : Mh(x) > s\} \cup \{x : |h(x)| > s\} =: E(s, n).$$

(Beachte, daß die rechte Seite ueber h tatsaechlich von n abhaengt.) Nach der Folgerung und da h in $\mathcal{L}^1$ ist, koennen wir nun das Maß der rechten Seite abschaetzen zu

$$\lambda(E(s, n)) \leq (3^N + 1)\|h\|_1 \frac{1}{s} = (3^N + 1)\frac{1}{sn}.$$

Nun ist die linke Seite von $(*)$ unabhaengig von n damit gilt also

$$\{x : Tf(x) > 2s\} \subset \bigcap_n E(s, n).$$

Aufgrund der vorangehenden Abschaetzung hat aber der Schnitt auf der rechten Seite das Lebesguemaß Null. Damit ist also fuer jedes s die Menge

$$\{x : Tf(x) > 2s\}$$

in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Damit ist dann die Menge $\{x : Tf(x) > 0\}$ in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Damit gilt dann fuer λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ also $Tf(x) = 0$ und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Theorem. Man mache sich klar, daß Menge der x von vollem Lebesguemaß, um die es jeweils geht, immer die Lebesguepunkte umfaßt. Wir beginnnen mit zwei Folgerungen, die auch unter dem Namen 'Lebesguescher Differentiationssatz' bekannt sind.

Folgerung (Lebesguescher Differentiationssatz). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und $\mu = f\lambda$. Dann existiert fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ die Ableitung*

$$D\mu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda$$

und stimmt mit $f(x)$ ueberein.

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\left| \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda - f(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda \to 0, r \to 0.$$

Aus dem vorigen Theorem folgt nun die gewuenschte Behauptung. $\square$

Folgerung (Lebesguescher Differentiationssatz - Variante). *Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}^N$ mit $\mu \ll \lambda$. Dann existiert*

$$D\mu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

fuer λ fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ und es gilt

$$\mu = (D\mu)\lambda.$$

Beweis. Aufgrund von $\mu \ll \lambda$ gilt nach dem Satz von Radon-Nikodym $\mu = f\lambda$ mit einem $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Nun folgt die Aussage leicht aus der vorangehenden Folgerung. $\square$

Bisher haben wir beim Bilden von $D\mu$ uns auf den Fall von Grenzwertbildung entlang von Kugeln beschraenkt. Es lassen sich obige Aussagen aber direkt auf etwas allgemeinere Folgen von Mengen ausweiten.

Definition (f. z. Folgen). *Sei $x \in \mathbb{R}^N$. Eine Folge E_n von meßbaren Mengen in $\mathbb{R}^N$ wird bei x freundlich zusammenziehend (f.z.) genannt, wenn es $\alpha > 0$ und $r_n \to 0$ gibt mit*

- *$E_n \subset U_{r_n}(x)$,*
- *$\lambda(E_n) \geq \alpha\lambda(U_{r_n}(x))$.*

Bemerkungen.

- Im englischen spricht man von *nicely shrinking sets.*
- Die Bedingung bedeutet gerade, daß die E_n einen erheblichen Teil von sich auf x zusammenziehenden Kugeln ausmachen. Damit sind sie in gewisser Weise 'aequivalent' zu solchen Kugeln.
- Es wird nicht gefordert, daß x zu E_n oder zu $\overline{E_n}$ gehoert.

Theorem (Ableitung eines absolut stetigen Maßes). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Dann gilt fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} f d\lambda = f(x).$$

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} |f - f(x)| d\lambda &\leq \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda(U_{r_n}(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\ &\to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

Hier haben wir in den beiden ersten Abschaetzungen die beiden charakteristischen Eigenschaften eine fz Folge benutzt und im letzten Schritt, daß x ein Lebesguepunkt ist. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann leicht die Aussage des Theorems. □

Ende der Vorlesung

3. Singulaere Maße

In den vorausgehenden Betrachtungen haben wir uns mit (bzgl. des Lebesguemasses) absolut stetigen Massen befasst. Wir wenden uns nun (bzgl. des Lebesguemasses) singulaeren Massen zu. Wir **erinnern** zunaechst an die Definition: Positive Masse μ und ν heissen *singulaer zueinander*, geschrieben als $\mu \perp \nu$, wenn es messbare Mengen A, B gibt mit $A \cap B = \emptyset$ und

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus A) = 0 \;\; \nu(\mathbb{R}^N \setminus B) = 0.$$

Es sind also μ und ν aus disjunkten Mengen getragen. Man sagt dann auch, dass μ singulaer bzgl. ν ist (und umgekehrt). Ist μ ein komplexes Mass, so heissen μ und ν singulaer, wenn $|\mu|$ und ν singulaer sind.

Ist μ singulaer bzgl. λ, so stellen sich fuer $D\mu$ zwei Fragen:

- Wert von $D\mu(x)$ fuer λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$
- Wert von $D\mu(x)$ fuer μ-fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Wir betrachten zunaechst ein Beispiel.

Beispiel. Sei $\mu = \delta_p$ fuer ein festes $p \in \mathbb{R}^N$ (d.h. $\mu(E) = 1$ falls $p \in E$ und $\mu(E) = 0$ sonst). Dann sieht man leicht, daß $D\mu(x) = \infty$ fuer $x = p$ und $D\mu(x) = 0$ sonst. Damit gilt also $D\mu = \infty$ fuer μ fast alle x und $D\mu = 0$ fuer λ fast alle x.

Theorem (Ableitung eines singulaeren Masses bzgl. λ). *Sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Ist μ ein komplexes Maß mit $\mu \perp \lambda$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = 0$$

fuer λ-fast-alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkung. Gibt es eine kompakte Menge K mit $\lambda(K) = 0$ und $|\mu|(\mathbb{R}^N \setminus K) = 0$, so ist die Aussage klar.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei μ ein positives Maß. (Andernfalls kann man μ wie oben diskutiert zerlegen zunaechst in Real- und Imaginaertiel und dies dann in ihren jeweiligen Positiv- und Negativteil. Alternativ kann man auch zu $|\mu|$ uebergehen.) Nun gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} \leq \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\alpha(x)\lambda(U_{r_n}(x))} \leq \frac{1}{\alpha(x)} \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\lambda(U_{r_n}(x))}.$$

Es reicht also $D\mu(x) = 0$ fuer λ fast alle x zu zeigen. Definiere nun

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{0<r<1/n} (Q_r\mu)(x) \right).$$

Dann ist $\overline{D}\mu$ meßbar. (Der Ausdruck in der Klammer ist unterhalbstetig (vgl. Begruendung oben) und die Folge (in n) der Funktionen konvergiert fallend.) Offenbar gilt weiterhin

$$\overline{D}\mu(x) = 0 \Longleftrightarrow D\mu(x) = 0.$$

Es reicht also $\overline{D}\mu(x) = 0$ fuer λ -fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$ zu zeigen.

Idee. Zerlege $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei μ_1 auf einer kompakten Menge vom Lebesguemaß Null getragen ist und μ_2 kleine Gesamtmasse hat. Dann gilt $\overline{D}\mu \leq \overline{D}\mu_1 + \overline{D}\mu_2$ und

- $\overline{D}\mu_1 = 0$ (da μ_1 auf Kompaktum getragen ist; siehe Bemerkung vor dem Beweis des Theorem),
- $\overline{D}\mu_2$ klein (nach Maximaltheorem, da μ_2 kleine Gesamtmasse hat).

(Vgl. Beweis oben, dass fast jeder Punkt ein Lebesguepunkt ist: Dort war eine Zerlegung $f = g + h$ mit $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und h mit kleiner L^1-Norm entscheidend.)

Hier sind die Details: Waehle $s > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wegen $\mu \perp \lambda$ ist μ auf eine Menge vom Lebesguemaß Null konzentriert. Weiterhin ist μ regulaer. Damit existiert also eine kompakte Menge K mit

$$\lambda(K) = 0, \text{ und } \mu(K) \geq \mu(\mathbb{R}^N) - \varepsilon.$$

Sei μ_1 die Einschraenkung von μ auf K d.h.

$$\mu_1(E) = \mu(K \cap E)$$

und

$$\mu_2 := \mu - \mu_1.$$

Dann gilt

$$\mu_2(\mathbb{R}^N) \leq \varepsilon.$$

Fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ gilt (da K kompakt, also um x eine Kugel in $\mathbb{R}^N \setminus K$ existiert)

$$(\overline{D}\mu)(x) = (\overline{D}\mu_2)(x) \leq (M\mu_2)(x).$$

Damit folgt also

$$\{x : \overline{D}\mu(x) > s\} \subset K \cup \{x : (M\mu_2)(x) > s\}.$$

Wegen $\lambda(K)=0$ folgt nach Anwenden des Maximaltheorem

$$\lambda(\{x:\overline{D}\mu(x)>s\})\leq \frac{3^N}{s}\mu_2(\mathbb{R}^N)\leq \frac{3^N}{s}\varepsilon.$$

Da dies fuer alle $\varepsilon>0$ gilt, folgt

$$\lambda(\{x:\overline{D}\mu(x)>s\})=0.$$

Da dies fuer alle $s>0$ gilt, folgt $(\overline{D}\mu)(x)=0$ fuer λ fast alle $x\in\mathbb{R}^N$. □

4. Das Ausrechnen der Lebesguezerlegung

Wir halten eine Folgerung aus den beiden vorangehenden Theoremen fest.

FOLGERUNG (Berechnen von μ_{ac}). *Sei zu jedem $x\in\mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, gewaehlt. Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}^N$ und $\mu=f\lambda+\mu_{sing}$ seine Lebesguezerlegung. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}=f(x)$$

fuer λ - fast - alle $x\in\mathbb{R}^N$. Insbesondere gilt $\mu\perp\lambda$ genau dann, wenn $(D\mu)(x)=0$ fuer λ - fast - alle $x\in\mathbb{R}^N$ gilt.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}=\frac{(f\lambda)(E_n(x))+\mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}=\frac{(f\lambda)(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}+\frac{\mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}.$$

Nun folgt die erste Aussage aus den beiden vorangehenden Theoremen. Das 'Insbesondere' folgt sofort aus der ersten Aussage. □

Bemerkung. Das Korollar besagt daß man den absolut stetigen Teil eines jeden komplexen Maßes durch Grenzwertbildung 'ausrechnen' kann.

Den singulaeren Teil des Maßes kann man nicht durch Grenzwertbildung ausrechnen. Man kann aber einen 'Traeger' ausrechnen. Das liefert die Antwort auf die Frage nach dem Wert der Ableitung bzgl. des Masses selber.

THEOREM (Berechnen des Traeger von μ_{sing}). *Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^N$ mit $\mu\perp\lambda$. Dann gilt*

$$(D\mu)(x)=\infty$$

fuer μ - fast - alle $x\in\mathbb{R}^N$. Tatsaechlich ist die Menge

$$T:=\{x\in\mathbb{R}^N:(D\mu)(x)=\infty\}$$

messbar mit

$$\mu(\mathbb{R}^N\setminus T)=0,\ \ \textit{und}\ \ \lambda(T)=0.$$

Bemerkung. Man beachte den Unterschied zum obigen Theorem zur Berechnung der Ableitung eines singulaeren Maßes bzgl. λ fast aller Punkte (vgl. auch das Beispiel $\mu=\delta_p$).

Beweis. **Idee.** Sei S eine Menge vom Lebesguemass Null mit $\mu(\mathbb{R}^N\setminus S)=0$. Betrachte fuer eine natuerliche Zahl m die Menge $\widetilde{E}_m$ der $x\in S$ mit $D\mu(x)\leq m$. Dann sollte gelten

$$\mu(\widetilde{E_m})\leq m\lambda(\widetilde{E}_m)\leq m\lambda(S)=0.$$

Da dies fuer jedes m gilt, folgt $D\mu(x) = \infty$ fast ueberall auf S.

Hier sind die Details: Nach Definition von Singularitaet gibt eine Borelmenge S (einen Traeger von μ) mit $\lambda(S) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^N \setminus S) = 0$. Aufgrund der Regularitaet des Lebesguemaßes gibt es weiterhin offene Mengen V_n mit

$$S \subset V_n \text{ und } \lambda(V_n) < \frac{1}{n}$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei fuer $m \in \mathbb{N}$ die Menge E_m definiert als die Menge aller $x \in S$, fuer die eine Folge r_k mit $r_k \to 0$ und

$$\mu(U_{r_k}(x)) < m\lambda(U_{r_k}(x))$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt also die gewuenscht Aussage

$$(D\mu)(x) = \infty$$

fuer alle $x \in S \setminus \bigcup_m E_m$. Wir werden nun zu jedem E_m eine meßbare Obermenge Ω_m vom μ Maß Null finden (und damit folgt dann die Aussage):
Fixiere natuerliche Zahlen m und n. Da V_n offen ist, existiert zu jedem $x \in E_m$ eine Kugel U_x in V_n mit

$$\mu(U_x) < m\lambda(U_x).$$

Sei $\widetilde{U}_x$ die Kugel um x mit einem Drittel des Radius von U_x. Setze

$$W_{n,m} := \bigcup_{x \in E_m} \widetilde{U}_x.$$

Dann ist $W_{n,m}$ offen, in V_n enthalten und enthaelt E_m.

Behauptung. $\mu(W_{n,m}) \leq \frac{3^N m}{n}$
Bew. Sei K eine beliebige kompakte Menge in $W_{n,m}$. Dan wird K durch endlich viele der $\widetilde{U}_x$ ueberdeckt. Daher existiert nach dem Ueberdreckungslemma eine endliche Menge F in E_m mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die $\widetilde{U}_x$, $x \in F$, sind disjunkt.
- $K \subset \cup_{x \in F} U_x$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \sum_{x \in F} \mu(U_x) \\ (x \in E_m) \quad &< m \sum_{x \in F} \lambda(U_x) \\ &= 3^N m \sum_{x \in F} \lambda(\widetilde{U}_x) \\ (\text{disjunkt}) \quad &\leq 3^N m \lambda(V_n) \\ (\text{Voraussetzung an } V_n) \quad &\leq 3^N m \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da das kompakte K beliebig war, folgt die gewuenschte Behauptung.

Setze nun

$$\Omega_m := \bigcap_n W_{n,m}.$$

Dann ist Ω_m meßbar als abzaehbarer Schnitt von offenen (also meßbaren) Mengen. Es enthaelt E_m (da jedes $W_{n,m}$ dies tut) und nach der Behauptung ist Ω_m eine μ-Nullmenge.

Wir zeigen nun, dass die Menge T messbar ist. Dann folgt die komplette letzte Aussage aus dem eben bewiesenen. Wir definieren

$$\underline{D}\mu(x) := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{0<r<\frac{1}{n}} Q_r(x)\right).$$

Dann ist $\underline{D}\mu$ messbar (!) und es gilt $D\mu(x) = \infty \Longleftrightarrow \underline{D}\mu(x) = \infty$. (!!). Damit ist dann

$$\{x : D\mu(x) = \infty\} = \{x : \underline{D}\mu(x) = \infty\}$$

messbar.
Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen. Es ist (!!) einfach. Zu (!): Es reicht zu zeigen, dass

$$S_n := \inf_{0<r<\frac{1}{n}} Q_r(x)$$

oberhalbstetig ist (da $\underline{D}\mu$ ein monotoner Grenzwert der S_n ist). Wir zeigen, dass fuer jedes $s > 0$ die Menge

$$\{x : S_n(x) < s\}$$

offen ist. Sei x aus dieser Menge. Dann existiert ein $0 < r < \frac{1}{n}$ und $0 < t < s$ mit

$$\frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))} \leq t < s.$$

Fuer $y \in U_\delta(x)$ mit genuegend kleinem $\delta > 0$ null gilt dann

- $U_{r-\delta}(y) \subset U_r(x)$ (gilt fuer alle $\delta > 0$ und
- $\lambda(U_r(x)) < \frac{s}{t}\lambda(U_{r-\delta}(y))$ (da $s/t > 1$ und $\delta > 0$ genuegend klein ist).

Damit erhaelt man

$$\begin{aligned}
\mu(U_{r-\delta}(y)) &\leq \mu(U_r(x)) \\
&\leq t\lambda(U_r(x)) \\
&< t\frac{s}{t}\lambda(U_{r-\delta}(y)) \\
&= s\lambda(U_{r-\delta}(y)).
\end{aligned}$$

Damit gehoert auch y zu der genannten Menge und diese ist offen. $\square$

Wir fassen die vorangehenden Betrachtungen noch einmal etwas zusammen. Dazu fuehren wir noch eine Definition ein.

Definition (Atome und Punktmaße). *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$.*
(a) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\mu(\{x\}) \neq 0$ heißt Atom von μ.
(b) Das Maß μ heißt stetig (oder atomfrei), wenn fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ gilt $\mu(\{x\}) = 0$.
(c) Das Maß μ heißt reines Punktmaß, wenn gilt

$$\mu = \sum_{x\in A} \mu(\{x\})\delta_x,$$

wobei A die Menge der Atome von μ ist.

Bemerkung - Stetigkeit eines Masses Ist μ ein positives endliches Mass auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), F(t) = \mu((-\infty, t]),$$
so ist F genau dann stetig, wenn μ stetig ist.

THEOREM (Lebesgue Zerlegung mit Ausrechnen). *Sei μ ein positives endliches Maß auf $\mathbb{R}^N$. Dann exsitieren eindeutige Maße $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ mit*
$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$
und folgenden Eigenschaften:

- *μ_{ac} ist absolut stetig bzgl. des Lebesguemaßes.*
- *μ_{sc} ist stetig und singulaer bzgl. des Lebesgmaßes.*
- *μ_{pp} ist ein reines Punktmaß.*

Weiterhin gilt mit $D\mu$ von oben und
$$T := \{x : D\mu(x) = \infty\}, \;\; P := \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$$
dann
$$\mu_{ac} = (D\mu)\lambda, \;\; \mu_{sing} = 1_T \mu, \; \mu_{pp} = 1_P \mu, \mu_{sc} = 1_{T \setminus P} \mu.$$

Bemerkung. (a) In den obigen Bezeichnungen steht *ac* fuer 'absolutely continuous', *sc* fuer 'singular continous' und *pp* fuer 'pure point'.
(b) Der erste Teil der Aussage, naemlich die Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$, hat nichts mit dem vorangehenden Betrachtungen zu tun. Es ist der zweite Teil der Aussage, der die vorangehenden Betrachtungen zusammenfasst.
(c) Fuehrt man noch den stetigen ('continuous') Anteil $\mu_{cont} = \mu_{ac} + \mu_{sc}$ ein, so laesst sich die obige Lebesguezerlegung so schreiben
$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp} = \mu_{ac} + \mu_{sing} = \mu_{cont} + \mu_{pp}.$$
Dabei unterscheiden sich die Ausdruecke zu den beiden Seiten der letzten Gleichung nur dadurch, daß der Term μ_{sc} verschieden eingruppiert wird.
(d) Es ist recht einfach absolut stetige Masse und reine Punktmasse anzugeben. Es ist nicht so einfach ein singulaer stetiges Mass anzugeben. Wir erinnern hier an ein Beispiel: Sei C die Mittel-Dritttel-Cantor-Menge und $F : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ die 'Teufelstreppe'. Dann gibt es ein eindeutiges Mass μ auf $[0, 1]$ mit $F(t) = \mu([0, t])$. Dieses Mass hat folgende Eigenschaften (Uebung):

- Es ist μ stetig (da F stetig ist).
- Es ist μ constant auf dem Komplement von C (nach Konstruktion). Inbesondere ist μ auf C getragen. Da C eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist dann also μ singulaer.

Beweis. Das folgt einfach aus dem bisher schon gezeigten:
Wir diskutieren zunaechst die *Existenz* der angegebene Zerlegung. Nach dem Satz zur Lebesguezerlegung gilt
$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$$
mit eindeutigen absolut stetigen μ_{ac} und singulaeren μ_{sing}. Wir koennen nun μ_{sing} weiter zerlegen in
$$\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

mit
$$\mu_{pp} := 1_P \mu_{sing}$$
mit $P = \{x : \mu_{sing}(\{x\}) > 0\}$ und $\mu_{sc} := \mu_{sing} - \mu_{pp}$. Da μ endlich ist, ist auch μ_{sing} endlich und damit ist P abzaehlbar. Damit haben dann μ_{ac}, μ_{sc} und μ_{pp} die angegegebenen Eigenschaften und es gilt offenbar nach Konstruktion $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$.
Die *Eindeutigkeit* der Zerlegung folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und der (einfach zu zeigenden) Eindeutigkeit der Zerlegung von μ_{sing}.

Ende der Vorlesung

Es bleiben die Formeln fuer μ_{ac}, μ_{sc} und μ_{pp} zu zeigen:
Wegen $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und der Absolutstetigkeit von μ_{ac} gilt $P = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ und mit der Abzaehlbarkeit von P folgt dann $1_P \mu_{sing} = 1_P \mu$. Weiterhin wissen wir schon, dass $T = \{x : D\mu(x) = \infty\}$ eine Lebesgue - Nullmenge ist (nach einem vorangehenden Theorem), die offenbar die Menge $\{x : D\mu_{sing}(x) = \infty\}$ enthaelt, die (nach dem vorigen Theorem) ein Traeger von μ_{sing} ist. Damit folgt dann also
$$1_T \mu = 1_T \mu_{ac} + 1_T \mu_{sing} = 1_T \mu_{sing} = \mu_{sing}.$$
Das beendet den Beweis.

$\square$

KAPITEL 6

Einige Saetze zu $C(X)$.

In diesem Abschnitt lernen wir einige wichtige Saetze zu $C(X)$ fuer kompakte X kennen:

- Satz von Stone/Weierstrass.
- Satz von Riesz zu positiven Funktionalen.
- Bestimmung des Dualraum von $C(X)$.

Es stellt sich heraus, dass Saetze fuer nichtkompaktes X auf solche fuer kompaktes X zurueckgefuehrt werden koennen mittels Kompaktifizierungen. Daher beginnen wir dieses Kapitel mit einem Abschnitt ueber Kompaktifizierungen.

1. Erinnerung: Etwas Topologie lokalkompakter Hausdorffraeume

In diesem Abschnitt erinnern wir an einige Grundlagen (lokalkompakter) topologischer Raeume.

Eine Topologie τ auf einer Menge ist ein System von Teilmengen von τ mit folgenden Eigenschaften:

- Gehoeren V_i, $i \in I$, zu τ, so gehoert auch $\cup_{i\in I} V_i$;
- Gehoeren $V_1, \ldots, V_n$ zu τ, so gehoert auch $V_1 \cap \cdots V_n$ zu τ.
- $\emptyset$ und x gehoeren zu τ.

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Topologie auf X. Die Mengen aus τ heissen *offen*. Komplemente von Mengen aus τ heissen abgeschlossen. Eine Teilmengen U eines topologischen Raumes heisst *Umgebung* von $x \in X$, wenn eine offene Menge V existiert mit

$$x \in V \subset U.$$

Ist M eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes, so ist

$$\overline{M} := \bigcup_{M \subset A \text{abgeschlossen}} A$$

abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthaelt. Sie wird als *Abschluss* von M bezeichnet. Es heisst

$$\partial M := \overline{M} \setminus M$$

der Rand von M. Man sieht leicht, dass der Rand von M gerade aus den Punkte besteht, deren Umgebungen sowohl M als auch M^c schneiden.
Eine Teilmenge K eines topologischen Raum (X, τ) heisst *kompakt*, wenn jede offene Ueberdeckung von K eine endliche Teilueberdeckung erlaubt. In

einem metrischen Raum ist das aequivalent dazu, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K enthaelt.
Ein topologischer Raum (X, τ) heisst *hausdorffsch*, wenn es zu beliebigen Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Menge U und V gibt mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ und $y \in V$. Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.
Wie man leicht sieht, gilt in beliebigen topologischen Raeumen folgendes:

- abgeschlossenen Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt.
- Ist (X, τ) hausdorffsch, so ist jede kompakte Menge abgeschlossen.

Bemerkung. Ist (X, τ) nicht hausdorffsch, so muss eine kompakte Menge nicht abgeschlossen sein, wie folgendes Beispiel zeigt: $X = [0, 1] \times \{0, 1\}/\sim$ mit $(a, b) \sim (c, d)$, wenn $0 \leq a = c < 1$ mit der durch die kanonische Projektion $\pi : [0, 1] \times \{0, 1\}$ induzierten Topologie.

Kompaktheit ist eine besonders nuetzliche Eigenschaft. Entsprechend spielen kompakte Raeume eine grosse Rolle. Allerdings ist nicht jeder Raum von Interesse schon kompakt. Das fuehrt dazu, dass man auch Raeume betrachtet, die zumindest 'lokal' gute Kompaktheitseigenschaften haben.

DEFINITION (Lokalkompakte Raeume). *Ein topologischer Raum heisst* lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Eine ganze Reihe von Problemen laueft auf das *Trennen* von (geeigneten) Mengen hinaus. Dabei sagt man, dass Mengen A, B getrennt werden koennen, wenn es offene Mengen U, V gibt mit

$$A \subset U, B \subset V \text{ and } U \cap V = \emptyset.$$

Offenbar koennen Mengen nur getrennt werden, wenn ihre Abschluesse disjunkt sind. Daher betrachtet man nur das Trennen von abgeschlossenen Mengen. Lokalkompakte Hausdorffraeume haben eine ganze Reihe guter Trennungseigenschaften. Das werden wir im weiteren Verlauf des Kapitels nutzen. Daher diskutieren wir es hier.

PROPOSITION. *Sei (X, τ) ein lokalkompakter Haussdorffraum. Sei $x \in X$ und U eine beliebige Umgebung von x. Dann existiert eine offene Menge V mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$ und*

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

Bemerkung. Die Proposition kann man auch so verstehen, dass man die disjunkten Mengen $\{x\}$ und $A = U^c$ durch offene diskunkte Mengen $V = V_1$ und $V_2 = \overline{V_1}^c$ trennen kann, so dass $\overline{V_1}$ kompakt ist.

PROOF. Nach Voraussetzung existiert eine kompakte Umgebung K von x. Wir betrachten nun

$$\partial U \cap K.$$

Diese Menge ist kompakt (als Schnitt einer abgeschlossenen Menge mit einer kompakten Menge) und x gehoert nicht zu ihr. Aufgrund der Hausdorffeigenschaft koennen wir dann diskunkte offene Mengen V und W finden mit $x \in V$ und $\partial U \cap K \subset W$. Ohne Einschraenkung koennen wir annehmen $V \subset K$ (da wir es sonst mit der in K enthaltenen offenen Umgebung von x schneiden koennten) und $V \subset U$. Dann gilt $\overline{V} \subset \overline{K} = K$ und damit ist $\overline{V}$ kompakt. Weiterhin gilt wegen $V \subset U$ auch $\overline{V} \subset \overline{U}$. Tatsaechlich ist sogar

$\overline{V} \subset U$. (Angenommen nein! Dann gaebe es einen Punkt $y \in \overline{V} \cap \partial U$. Wegen $\overline{V} \subset K$ gilt dann $y \in \partial U \cap K$. Da V aber disjunkt zum offenen W ist, gehoert $\overline{V}$ ebenfalls zu W^c. Insbesondere kann $\overline{V}$ dann keinen Punkt aus $\partial U \cap K$ enthalten.) $\square$

LEMMA. *Sei (X, τ) ein lokalkompakter hausdorffraum. Sei $K \subset X$ kompakt und $U \subset X$ offen mit $K \subset U$. Dann existiert eine offene Menge V mit kompaktem Abschluss und*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Bemerkung. Die Proposition kann man auch so verstehen, dass man eine kompakte Mengen K von einer abgeschlossenen Menge A (dem Komplement von U) durch offene Mengen $V = V_1$ und $V_2 = \overline{V}^c$ trennen kann, so dass $\overline{V_1}$ kompakt ist.

PROOF. Nach der vorigen Proposition kann man zu jedem $x \in K$ eine offene Menge V_x finden mit kompaktem Abschluss und

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U.$$

Diese V_x, $x \in X$, bilden nun eine offene Ueberdeckung von X. Entsprechend gibt es eine endliche Teilueberdeckung $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Dann hat

$$V := \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$$

die gewuenschte Eigenschaft. $\square$

Tatsaechlich kann man in lokalkompakten Hausdorffraeumen sogar mit Funktionen trennen und es gilt folgendes Lemma.

LEMMA (Lemma von Urysohn). *Sei (X, τ) ein lokakompakter Raum und $K \subset X$ kompakt und $\subset X$ offen mit $K \subset U$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0, 1]$ mit kompaktem Traeger und $f = 1$ auf K und $supp(f) \subset U$.*

Der Beweis wuerde hier etwas zu weit fuehren.

2. Die Einpunkt-Kompaktifizierung

Kompakte Raeume sind besonders schoen. Daher ist es oft praktisch, einen gegebenen Raum X als Teilmenge von einem kompakten Raum K auffassen zu koennen. Da abgeschlossene Teilmengen kompakter Raeume kompakt sind, kann man dann ohne Einschraenkung auch annehmen, dass X dicht in K ist (weil man sonst K durch das ebenfalls kompakte $\overline{X}$ ersetzen kann. Ein solcher Raum heisst Kompaktifizierung von X. Die formale Definition ist im folgenden gegeben.

DEFINITION (Kompaktifizierung). *Eine Kompaktifizierung eines topologischen Raumes (X, τ) ist ein Triple $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}, \iota)$, so dass $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ ein kompakter Raum ist und $\iota : X \longrightarrow \widetilde{X}$ ein Homeomorphismus (auf sein Bild) mit dichtem Bild.*

Bemerkung. Es ist also $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau}, \iota)$ eine Kompaktifizierung von (X, τ) genau dann, wenn X (via ι) als dichte Teilmenge des kompakten $\widetilde{X}$ aufgefasst werden kann.
Jeder Raum kann auf eine sehr einfache Art kompaktifiziert werden:

THEOREM (Einpunkt-Kompaktifizierung). *Sei (X, τ) ein nichtkompakter Raum. Sei ∞ ein Punkt, der nicht zu X gehoert. Dann existiert eine eindeutige Kompaktifizierung $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ mit*

$$\widetilde{X} = X \cup \{\infty\},$$

so dass alle kompakten abgeschlossenen Mengen in X auch bzgl. $\widetilde{\tau}$ abgeschlossen sind. Der Raum $\widetilde{X}$ ist Hausdorff genau dann, wenn X ein lokalkompakter Hausdorff Raum ist.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die *Existenz.* Dabei ist die **Idee** wie folgt: Es wird X genau um einen Punkt, naemlich ∞, vergroessert, und die Umgebungen von ∞ sind die Komplemente der kompakten Mengen in X. Hier sind die Details:
Sei $\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$ und $\iota : X \longrightarrow \widetilde{X}, x \mapsto x$. Sei

$$\tau^{(\infty)} := \{A \subset \widetilde{X} : \infty \in A, \widetilde{X} \setminus A \text{ abg. u. kompakt}\}.$$

Dann ist $\tau^{(\infty)}$ abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Schnitten. Weiterhin gilt fuer $A \in \tau^{(\infty)}$ und $B \in \tau$ auch

$$A \cap B \in \tau, \ A \cup B \in \tau^{(\infty)}.$$

(Nachrechnen; beachte $X \setminus A = \widetilde{X} \setminus A$!) Damit ist $\widetilde{\tau} := \tau \cup \tau^{(\infty)}$ eine Topologie auf $\widetilde{X}$. Nach Definition ist jedes kompakte abgeschlossene $C \subset X$ wegen

$$C = \widetilde{X} \setminus (\widetilde{X} \setminus C) \text{ und } \widetilde{X} \setminus C \in \tau^{(\infty)}$$

ebenfalls abgeschlossen in $\widetilde{\tau}$. Damit hat $\widetilde{\tau}$ die definierende Eigenschaft. Es bleibt zu zeigen, dass es sich ume eine Kompaktifizierung handelt:

- *ι Homeomorphismus.* Z.z. Einschraenkung von $\widetilde{\tau}$ auf X ist gerade τ. Fuer $A \in \tau^{(\infty)}$ ist $A \cap X = X \setminus (\widetilde{X} \setminus A)$ offen bzgl τ. Fuer $A \in \tau$ ist $A \cap X = A$ offen bzgl. τ.
- *X ist dicht in $\widetilde{X}$.* X ist nicht kompakt. Damit enthaelt jedes Element aus $\tau^{(\infty)}$ auch Punkte aus X. Damit enthaelt jede Umgebung von ∞ auch Punkte von X.
- *$\widetilde{X}$ ist kompakt.* Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Ueberdeckung von $\widetilde{X}$ bestehend aus Elementen von $\widetilde{\tau}$. Dann gibt es U_{i_o} , das ∞ enthaelt. Dieses U_{i_0} gehoert dann also zu $\tau^{(\infty)}$. Die uebrigen Mengen bilden dann eine Ueberdeckung des kompakten (!)

$$\widetilde{X} \setminus U_{i_o} \subset X.$$

Damit erlauben sie eine endliche Teilueberdeckung.

Eindeutigkeit. Sei $(X \cup \{\infty\}, \overline{\tau})$ eine Kompaktifizierung.
Sei $U \in \overline{\tau}$. Ist $\infty \notin U$, so gilt $U \subset X$ und $U \in \tau$ folgt aus der Homeomorphismeneigenschaft. Gehoert ∞ zu U, so ist $\widetilde{X} \setminus U$ abgeschlossen und kompakt, gehoert also zu $\tau^{(\infty)}$. In jedem Fall ist U ein Element von $\widetilde{\tau}$.

Sei $U \in \widetilde{\tau}$. Ohne Einschraenkung $U \in \tau^{(\infty)}$. Dann ist also $U = \widetilde{X} \setminus C$ mit C abgeschlossen und kompakt. Dann ist C auch abgeschlossen und kompakt bzgl. $\overline{\tau}$. Damit gehoert U auch zu $\overline{\tau}$.

Zur letzten Aussage.
X hausdoffsch, lokalkompakt impliziert $\widetilde{X}$ hd. Es reicht $x \in X$ und $\infty \in \widetilde{X}$ durch disjunkte Umgebungen zu trennen. Sei C eine kompakte Umgebung von x (existiert weg. lokalkompakt). Dann sind $\widetilde{X} \setminus C$ und C° offene disjunkte Umgebungen von ∞ bzw. x.

$\widetilde{X}$ hausdorff impliziert X lokalkompakt, hausdorffsch.
Hausdorffsch: Nach Konstruktion induziert die Topologie von $\widetilde{X}$ auf X gerade τ.
Lokalkompakt: Sei $x \in X$ beliebig. Da $\widetilde{X}$ hausdorfsch ist, gibt es offene disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $\infty \in V$. Betrachte nun

$$W := \widetilde{X} \setminus V \subset X.$$

Dann ist W kompakt, da $\widetilde{X}$ kompakt, und V offen. Weiterhin enthaelt W die Menge U und ist also eine Umgebung von x. □

Ende der Vorlesung

Definition. *Die Kompaktifizierung aus dem vorigen Satz heisst Einpunktkompaktifizierung oder auch Alexandroff-Kompaktifizierung.*

Beispiele.

- $[0, 1)$ hat die Einpunktkompaktifizierung $[0, 1]$.
- $(0, 1)$ hat die Einpunktkompaktifizierung S^1. (Zeichnung: Ein Punkt ueber gekruemmtem Intervall.)
- $\mathbb{R}$ hat die Einpunktkompaktifizierung S^1 (da $\mathbb{R}$ und $(0, 1)$ homeomorph sind mittels arctan).
- $\mathbb{R}^n$ hat die Einpunktkompaktifizierung $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ mittels stereographischer Projektion. (Zeichung $n = 1$ und $n = 2$.)

Die letzte Aussage des Satzes laesst sich verallgemeinern und das 'erklaert' die Relevanz lokalkompakter Hausdorffraeume:

Folgerung. *Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann ein lokalkompakter Hausdorffraum, wenn er eine offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraum $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ ist.*

Beweis. Ist K kompakt und hausdorffsch, so ist jede offene Untermenge U lokalkompakt und hausdorffsch (Denn: Sei $x \in U$ beliebig. Da K kompakt und hausdorffsch ist, koennen das kompakte $K \setminus U$ und das kompakte $\{x\}$ durch offene Mengen voneinander getrennt werden. Es gibt also offene disjunkte Mengen V, W mit $x \in V$ und $K \setminus U \subset W$. Uebung.)

Ist umgekehrt (X, τ) lokalkompakt und haussdorfsch und nicht kompakt, so ist es nach dem (Beweis des) vorigen Satzes eine - offenbar offene - Teilmenge des kompakten $X \cup \{\infty\}$ □

Bemerkung. Fuer lokalkompakte Hausdorffraeume X gibt es i.a. mehrere Kompaktifizierungen. Die Alexandroff-Kompaktifizierung ist die 'kleinste'.

Die 'groesste' ist die sogenannte Stone-Czech Kompaktifizierung. Sie ist dadurch charakterisiert, dass alle beschraenkten stetigen Funktionen auf X zu stetigen Funktionen auf ihr fortgesetzt werden koennen. (Details s. Vorlesung C^*-Algebren.)

3. Der Satz von Stone-Weierstrass.

Es geht darum stetige Funktionen auf einem kompakten Raum durch Funktionen aus einer gegebenen Algebra von Funktionen zu approximieren. Dazu reicht es, wenn

- die Algebra die Punkte trennt und
- nirgends verschwindet.

Insbesondere sind die Polynome auf einem kompakten Intervall in $\mathbb{R}$ dicht. Der Satz von Stone-Weierstrass beruht zutiefst auf Betrachtungen zur Ordnung in $\mathbb{R}$. Darum werden wir auch zunaechst nur reellwertige Funktionen betrachten.

Ein Vektorraum mit einer assoziaetiven Multiplikation heisst *Algebra*. Eine Algebra mit einer submultiplikativen Norm heisst Banachalgebra, wenn der Vektorraum vollstaendig ist bzgl. der Norm.

Beispiel. (X,τ) topologischer Raum. Dann ist $C_b(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \text{f stetig und beschraenkt}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ eine Banachalgebra.

Beispiel. (X,τ) kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \text{f stetig}\} = C_b(X)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachalgebra.

Beispiel. Sei (X,τ) ein lokal kompakter topologischer Raum (i.e. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung). Dann setzt man

$$C_0(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists K \subset X \text{ kompakt mit } |f(x)| \le \varepsilon \text{ auf } X \setminus K\}.$$

Dann ist $C_0(X)$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $C_b(X)$ und damit eine vollstaendige Algebra bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Notation. $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \vee g := \max\{f,g\}$, $f \wedge g := \min\{f,g\}$.

LEMMA (Approximation in zwei Punkten impliziert gleichmaessige Approximation). *Sei X kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ ein Vektorraum von stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Sei $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Bildung von Minima und Maxima. Dann gilt: Kann das stetige $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Paar von Punkten aus X durch Funktionen aus $\mathcal{A}$ beliebig gut approximiert werden, so kann f gleichmaessig durch Funktionen aus $\mathcal{A}$ approximiert werden.*

Beweis. Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung zu $x,y \in X$ eine Funktion $f_{x,y}$ mit

$$f_{x,y}(z) - \varepsilon < f(z) < f_{x,y}(z) + \varepsilon$$

fuer $z \in \{x,y\}$. Da f stetig ist, sind die Mengen

$$U_{x,y} := \{z \in X : f(z) < f_{x,y}(z) + \varepsilon\}$$

und

$$V_{x,y} := \{z \in X : f_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

offen. Nach Konstruktion enthalten sie sowohl x als auch y (und sind insbesondere nichtleer).
Fuer festes $x \in X$ ist dann also $\{U_{x,y} : y \in X\}$ eine offene Ueberdeckung von X. Da X kompakt ist, existieren dann $y_1, \ldots, y_N \in X$ mit

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} U_{x,y_k}.$$

Dann gehoert

$$f_x := f_{x,y_1} \vee \cdots \vee f_{x,y_N} \ \text{(Maximum)}$$

zu $\mathcal{A}$ und es gilt nach Konstruktion

$$(*)\ \ f(z) < f_x(z) + \varepsilon$$

fuer **alle** $z \in X$ sowie

$$(**)\ \ f_x(z) < f(z) + \varepsilon$$

fuer alle

$$z \in W_x := \bigcap_{k=1}^{N} V_{x,y_k}.$$

Da W_x, $x \in X$, offen sind, bilden sie eine offene Ueberdeckung des kompakten X. Damit existieren dann also $x_1, \ldots, x_M$ mit

$$X = \cup_{l=1}^{M} W_{x_l}.$$

Dann gehoert

$$f_\varepsilon := f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_M} \ \text{(Minimum)}$$

zu $\mathcal{A}$, und es gilt nach Konstruktion

$$f_\varepsilon - \varepsilon \stackrel{(**)}{<} f(z) \stackrel{(*)}{<} f_\varepsilon(z) + \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Ende der Vorlesung

LEMMA (Vollstaendige Algebra ist abgeschlossen unter Minima und Maxima). *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine vollstaendige Teilalgebra von $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Bilden von Minima und Maxima.*

Beweis. Wir skizzieren zunaechst kurz die **Idee:** Da $\mathcal{A}$ Algebra ist, gehoeren Polynome (mit verschwindendem konstanten Term) von Elementen von $\mathcal{A}$ wieder zu $\mathcal{A}$. Da A abgeschlossen ist, gehoeren sogar Grenzwerte von Polynomen (mit verschwindendem konstantem Term) wieder zu $\mathcal{A}$. Damit gehoert dann $\sqrt{f}$ zu $\mathcal{A}$ fuer $f \geq 0$. Damit gehoert dann $|f| = \sqrt{f^2}$ zu $\mathcal{A}$. Damit gehoeren dann $\min\{f,g\}, \max\{f,g\}$ zu $\mathcal{A}$.
(Man beachte, dass bei diesem Schluss die Approximation EINER Funktion naemlich der Wurzel durch Polynome mit nichtverschwindendem konstanten Term verwendet wird.)

Hier nun die Details: Sei $\varepsilon > 0$. Dann hat $t \mapsto (\varepsilon^2 + t)^{1/2}$ eine Reihenentwicklung z.b. um $t = 1/2$, die auf $[0,1]$ gleichmaessig konvergiert (vgl. Analysis I). Damit existiert also ein Polynom p mit

$$|(\varepsilon^2 + t)^{1/2} - p(t)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $t \in [0,1]$. Insbesondere gilt also

$$|p(0)| \leq 2\varepsilon.$$

Sei nun $q := p - p(0)$. (Dann hat also q verschwindenden konstanten Anteil.) Dann gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq 1} |q(t) - t^{1/2}| &\leq \sup_{0\leq t\leq 1} |p(t) - p(0) - t^{1/2}| \\
&= \sup_{0\leq t\leq 1} |p(t) - (\varepsilon^2 + t)^{1/2} + (\varepsilon^2 + t)^{1/2} - t^{1/2} - p(0)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \\
&= 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit gilt fuer $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ also

$$\|q(f^2) - |f|\|_\infty \leq 4\varepsilon.$$

Da q verschwindenden konstanten Anteil hat, ist weiterhin $q(f) \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ vollstaendig ist und $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt also, dass $|f| \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Damit folgt dann $|f| \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$. Damit folgt nun

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathcal{A} \ \ (Maximum)$$
$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathcal{A} \ \ (Minimum)$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{A}$. □

Theorem (Stone-Weierstrass, reelle Version). *Sei X ein kompakter Hausorff Raum. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von reellwertigen stetigen Funktionen auf X mit folgenden Eigenschaften:*

- *Es verschwindet $\mathcal{A}$ in keinem Punkt von X (d.h. zu jedem $x \in X$ existiert $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$).*
- *Es trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von X (d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$).*

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in den stetigen reellwertigen Funktionen auf X bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Bemerkung. Die erste Bedingung ist insbesondere erfuellt, falls die konstanten Funktionen zu $\mathcal{A}$ gehoeren (und so wird der Satz auch oft in der Literatur zitiert).

Beweis. Der Abschluss $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ ist eine vollstaendige Algebra von reellen stetigen Funktionen auf X. Damit ist $\mathcal{B}$ nach dem vorigen Lemma abgeschlossen unter Bildung von Minima und Maxima.

Behauptung. Zu beliebigem zwei Punkten $x, y \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}$ kann man eine Funktion h in $\mathcal{A}$ finden mit $h(x) = a$ und $h(y) = b$:
Bew. Sei zunaechst f mit $f(x) \neq f(y)$ gewaehlt. Ist $f(x), f(y) \neq 0$, so kann man aus f und $g = f^2$ das gewuenschte h linearkombinieren, da

$$det \begin{pmatrix} f(x) & f^2(x) \\ f(y) & f^2(y) \end{pmatrix} = (f(x)f(y))(f(x) - f(y)) \neq 0.$$

Verschwindet f in o.E. x, so waehlen wir noch ein g mit $g(x) \neq 0$ und koennen wieder aus f und g das gewuenschte h linearkombinieren.

Wegen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kann man also insbesondere jede stetige reelle Funktion in zwei Punkten durch Funktionen aus $\mathcal{B}$ beliebig gut approximieren.

Zusammengenommen folgt dann aus dem ersten Lemma, dass $\mathcal{B}$ dicht in den stetigen reellen Funktionen auf X ist. Da $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{B}$ ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkungen.

- Fuer die Algebra der Polynome auf einem kompakten Intervall wurde der Satz zuerst von Weierstrass bewiesen. Offenbar gilt er auch fuer die Algebra der Polynome mit verschwindendem konstanten Term.
- Ein entscheidender Schritt unseres Beweises besteht darin, zu zeigen, dass die Polynome (mit verschwindendem konstantem Term) de Betragsfunktion auf $[-1, 1]$ gleichmaessig approximieren.
- Setzt man fuer die Algebra $\mathcal{A}$ nur Punktetrennung voraus, so gilt $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$ oder $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$ fuer ein $x_0 \in X$[1]. (Uebung: Analog zu obigem Beweis: Man kann alle Funktionen aus der angegebenen Menge in zwei beliebigen Punkten beliebig gut approximieren).

Theorem (Satz von Stone/Weierstrass-komplexe Version). *Sei X ein kompakter, hausdorffscher Raum. Sei $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $C(X)$, so dass gilt:*

- *Es verschwindet $\mathcal{A}$ nirgends.*
- *Es trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von X.*
- *Es ist $\mathcal{A}$ selbstadjungiert (d.h. mit $f \in \mathcal{A}$ gehoert auch $\overline{f}$ zu $\mathcal{A}$).*

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis. Betrachte $\Re\mathcal{A} := \{\Re f : f \in \mathcal{A}\}$ und $\Im\mathcal{A} : \{\Im f : f \in \mathcal{A}\}$. Dann sind $\Re\mathcal{A}$ und $\Im\mathcal{A}$ nach der dritten Voraussetzung Teilmengen von $\mathcal{A}$ und naturlich reelle Algebren (da Multiplikation etc nicht aus ihnen herausfuehrt). Damit gilt nach dem vorigen Satz also, dass $\Re\mathcal{A}$ und $\Im\mathcal{A}$ dicht in den reellen stetigen Funktionen auf X sind. Damit folgt die Aussage aus

$$\mathcal{A} = \Re\mathcal{A} + i\Im\mathcal{A}.$$

Das beendet den Beweis. □

$\longleftrightarrow$ Ende der Vorlesung

Folgerung (Stone/Weierstrass fuer lokalkompakte Raeume). *Sei X ein lokalkompakter Haussdorffraum und $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $C_0(X)$, die die Punkte trennt, nirgends verschwindet und selbstadjungiert ist. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis. Sei $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X. Dann koennen wir $\mathcal{A}$ in natuerlichen Weise in $C(\widetilde{X}) = X \cup \{\infty\}$ eingebetten (indem wir jede Funktion $f \in \mathcal{A}$ auf dem zusaetzlichen Punkt ∞ durch den Wert 0 fortsetzen). Wir betrachten nun $\mathcal{B} := \mathcal{A} + \mathbb{C}1$. Dann gilt:

- Es ist $\mathcal{B}$ eine selbstadjungierte Teilalgebra von $C(\widetilde{X})$.
- Es trennt $\mathcal{B}$ die Punkte von $\widetilde{X}$ (! es trennt $\mathcal{A}$ die Punkte von X und verschwindet dort nicht).

[1] Letztere Algebra kann man mit $C(X \setminus \{x_0\})$ identifizieren

- Es verschwindet $\mathcal{B}$ nirgends (da es die konstante Funktion 1 enthaelt).

Damit folgt aus dem Satz von Stone/Weierstrass, dass es zu jedem $f \in C_0(X)$ ein $g \in \mathcal{B}$ gibt mit $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$. Nach Definition von $\mathcal{B}$ gibt es dann $h \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $g = h + \lambda 1$ und damit also

$$\|f - (h + \lambda 1)\|_\infty \le \varepsilon.$$

Durch Einsetzen bei ∞ und Nutzen von $f(\infty) = 0 = h(\infty)$ folgt $|\lambda\| \le \varepsilon$ und damit

$$\|f - h\|_\infty \le 2\varepsilon.$$

Wegen $h \in \mathcal{A}$ folgt die gewuenschte Aussage und das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Laesst man die Voraussetzung der Selbstadjungiertheit weg, so gilt eine entsprechende Aussage fuer reellwertige Funktionen.

Bemerkung. Beim Satz von Stone-Weierstrass (und seiner Folgerung) ist die dritte Voraussetzung notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: (Wir verwenden hier Grundlagen der Funktionentheorie; vgl. frueheren Exkurs in der Vorlesung.) Sei

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}.$$

$$H(D) := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig auf } D \text{ und holomorph auf } D^\circ\}.$$

Dann ist $H(D)$ vollstaendig bzgl $\|\cdot\|_\infty$ (klar, da Cauchy-Integral Formel unter gleichmaessiger Konvergenz stabil ist....). Weiterhin enthaelt $H(D)$ die konstanten Funktionen (klar) und trennt die Punkte (da $id \in H(D)$). Waere es dicht in $C(D)$, so muesste es mit $C(D)$ uebereinstimmen (da es vollstaendig ist). ABER: Nicht jede stetige Funktion auf D ist holomorph (z.B. ist die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ stetig, aber nicht komplex differenzierbar).

Ende der Vorlesung

Anwendungen des Satz von Stone-Weiterstrass und seiner Folgerung.

- Sei $X = [0, 1]$ und $\mathcal{A}$ die Algebra der Polynome. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C([0, 1])$. Gleiches gilt fuer die Algebra der Polynome mit verschwindendem konstantem Term.
  Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weiertrass. □
- Sei $X = S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Es ist $Lin\{e^{in\cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $C(S)$. Insbesondere bilden die $\{e^{in\cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$, eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2(S)$.

  Beweis. Offenbar handelt es sich um eine Algebra. Diese trennt die Punkte, verschwindet nirgends, und ist selbstadjungiert. Dichtheit dieser Algbra in $C(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (und damit auch bzgl. $\|\cdot\|_2$!) folgt nun nach Stone/Weierstrass. Da $C(S)$ dicht in $L^2(S)$ bgzl $\|\cdot\|_2$ ist, folgt die letzte Behauptung. □
- Seien X, Y kompakte Hausdorffraeume. Fuer $f \in C(X)$ und $g \in C(Y)$ sei

  $$f \otimes g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}, f \otimes g(x, y) := f(x)g(y).$$

  Dann ist $Lin\{f \otimes g : f \in C(X), g \in C(Y)\}$ dicht in $C(X \times Y)$.

Beweis. Es handelt sich offenbar um eine Algebra. Damit folgt die Aussage aus dem Satz von Stone/Weierstrass. □

- Sei $X = [0, \infty)$. Sei fuer $t > 0$ die Funktion e_t definiert durch
$$e_t : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \ e_t(s) := e^{-ts}.$$
Dann ist $Lin\{e_t : t \geq 0\}$ eine Algebra, die dicht in $C_0([0, \infty))$ ist.
Beweis. Offenbar handelt es sich um eine Algebra. Sie ist dicht nach der Folgerung (Satz von Stone-Weierstrass fuer lokalkompakte Raeume). □
- Sei $X = \mathbb{R}$. Sei fuer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Funktion f_λ definiert durch
$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ f_\lambda(t) := \frac{1}{t - \lambda}.$$
Sei $\mathcal{A} := Lin\{f_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(\mathbb{R})$. Tatsaechlich reicht es λ aus einer Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu betrachten, die einen geeigneten Haeufungspunkt hat.
Beweis. Das folgt aus der Folgerung (Satz von Stone-Weiterstrass fuer lokalkompakte Raeume). Details werden als Uebung ueberlassen. Tipp: Es gilt $f_\lambda - f_\mu = (\mu - \lambda) f_\lambda f_\mu$.... □

Bemerkung. Die oben gegebenen Beispiele ermoeglichen es die Injektivitaet der Fouriertransformation, der Laplacetransformation und der Boreltransformation auf den Massen zu zeigen.

4. Der Rieszsche Darstellungssatz und positive Funktionale auf $C(X)$

In diesem Abschnitt lernen wir einen wichtigen Satz ueber positive Funktionale auf $C(X)$ kennen. Tatsaechlich werden wir sogar einen etwas allgemeineren Rahmen waehlen. In einem spaeteren Abschnitt werden wir dann allgemeine stetige Funktionale auf $C(X)$ beschreiben (als Linearkombination von positiven).

Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Eine natürliche σ-Algebra auf X ist dann die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Sie heisst *Borel-σ-Algebra*. Sie enhtaelt offenbar alle kompaktem Mengen. Eine wesentliche Eigenschaft ist, dass alle stetigen Funktionen meßbar bezueglich der Borel-σ-Algebra sind. Wir werden im folgenden einen topologischen Raum immer als messbaren Raum mit der Borel-σ-Algebra verstehen.

Bemerkung - Baire-σ-Algebra. Es gibt noch eine weitere natürliche Wahl einer σ-Algebra auf einem topologischen Raum, naemlich die Baire-σ-Algebra. Dazu zunaechst eine **Warnung:** Fuer die Baire-σ-Algebra sind verschiedene Definitionen im Gebrauch. Fuer lokalkompakte, σ-kompakte Hausdorffraeume stimmen alle diese Definitionen ueberein. Im allgemeinen Fall stimmen diese Definitionen aber **nicht** ueberein. Wir fuegen eine kurze Diskussion ein:

- In einem allgemeinen topologischen Raum versteht man unter der Baire-σ-Algebra die kleinste σ-Algebra, so dass alle stetigen Funktionen meßbar sind.

Ist der Raum metrisierbar, so ist das gerade die Borel-σ-Algebra. (Beweis: Da alle stetigen Funktionen bzgl. der Borel-σ-Algebra messbar sind, ist die Baire-σ-Algebra in der Borel-σ-Algebra enthalten. Ist umgekehrt d eine Metrik, die die Topologie erzeugt, so kann man durch Betrachten der stetigen Funktionen $x \mapsto d(X \setminus U, x)$ leicht sehen, dass jede offene Menge U meßbar bzgl. der Baire-σ-Algebra ist.)

- In einem lokalkompakten Hausdorffraum ist es naheliegend, die kleinste σ-Algebra zu betrachten, so daß alle stetigen Funktionen mit kompaktem Traeger meßbar sind. Diese σ-Algebra wird ebenfalls Baire-σ-Algebra genannt. Sie wird von den kompakten G_δ-Mengen erzeugt. (Beweis: Ist h eine reelle stetige Funktion mit kompaktem Traeger, so ist $\{h \geq c\}$ fuer $c > 0$ offenbar eine kompakte G_δ-Menge. Fuer $c \leq 0$ ist das Komplement eine abzaehlbare Vereinigung kompakter G_δ-Mengen. Umgekehrt erhaelt man, wie man mit dem Lemma von Urysohn leicht sieht - jede kompakte G_δ-Menge als abzaehlbaren Schnitt von Urbildern der Form $f^{-1}(\{1\})$ fuer stetige f mit kompaktem Traeger.)

  Ist der Raum σ-kompakt, so sind alle stetigen Funktionen meßbar bezueglich dieser σ-Algebra - wie man leicht mit dem Urysohn Lemma sieht. Damit stimmt diese Definition der Baire-σ-Algebra dann mit der vorigen Definition ueberein. Ist der Raum aber nicht σ-kompakt, so muessen die Definitionen nicht uebereinstimmen. (Betrachte dazu einfach eine ueberabzaehlbare Menge mit der diskreten Topologie. Dann sind alle Funktionen stetig und die Borel-σ-Algebra ebenso wie die im ersten Punkt definierte Baire-σ-Algebra enthalten alle Teilmengen. Die Baire-σ-Algebra nach dem zweiten Punkt besteht aus den Teilmengen, die abzaehlbar oder co-abzaehlbar sind. (Uebung.))
- Die Baire σ-Algebra ist praktisch, da jedes endliche Maß automatisch regulaer ist.

Weiterhin definiert man

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \; f \text{ verschwindet ausserhalb eines Kompaktum}\}.$$

Schliesslich gilt in einem lokalkompaktem Hausdorffraum das Lemma von Urysohn: $K \subset X$ kompakt, $K \subset U$. Dann existiert ein $f \in C_c(X)$ mit $1_K \leq f$ und $\mathrm{supp}(f) \subset U$. (Zeichnung.)

Definition (Regulaeritaet von Maßen). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei μ ein Mass auf der Borel-σ-Algebra von (X, τ).*

- *Gilt*
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ offen}\}$$
fuer jedes messbare E, so heisst μ von aussen regulaer.
- *Gilt*
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$$
fuer jedes messbare E, so heisst μ von innen regulaer.
- *Ist μ von innen und aussen regulaer, so heisst es regulaer.*
- *Ist μ auf allen Kompakta endlich, so heisst es Borelmaß.*

Die Relevanz von (mehr oder weniger) regulaeren Borelmaßen ergibt sich daraus, dass diese gerade den positiven Funktionalen auf $C_c(X)$ entsprechen. Details werden im folgenden diskutiert.

Ist (X,τ) ein lokalkompakter Hausdoffraum, so heisst eine Abbildung $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ *positiv*, wenn

$$\Lambda(f) \geq 0$$

fuer alle $f \in C_c(X)$ mit $f \geq 0$ gilt. Ist μ ein Borelmaß auf dem lokalkompakten Hausdorffraum (X,τ), so gehoert jedes $f \in C_c(X)$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mu)$. (Denn es ist f stetig also messbar und erfuellt $0 \leq |f| \leq \|f\|_\infty 1_K$ mit einem geeigneten kompakten K. Die Funktion 1_K gehoert aber zu $\mathcal{L}^1(X,\mu)$, da μ ein Borelmaß ist.) Damit existiert also $\int f d\mu$ fuer alle $f \in C_c(X)$. Die Abbildung

$$\Lambda_\mu : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f(x) d\mu(x),$$

ist dann offenbar ein positives lineares Funktional. Es gilt auch eine Umkehrung, naemlich folgender gefeierter Satz.

Ende der Vorlesung

Theorem (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Sei $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann gibt es ein eindeutiges Borelmaß μ auf X mit*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \ \ (*)$$

und

- $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ offen}\}$ *fuer jedes messbare E, 'von aussen regulaer'*
- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ *fuer jedes offene E. 'fast von innen regulaer'*

Fuer dieses Mass μ gilt auch noch

- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ *fuer jedes messbare E mit $\mu(E) < \infty$.*

Beweis. Wir geben hier keinen Beweis, sondern verweisen etwa Heinz Bauer *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter (1990): Der erste Teil der Aussage findet sich in Kapitel 29, Satz 29.4 und der letzte Teil der Aussage folgt dann gerade aus Korollar 28.5.

Als *Beweisskizze* mag folgendes dienen: Fuer das kompakte K definiert man

$$\widetilde{\mu}(K) := \inf\{\Lambda(f) : f \geq 1_K\}.$$

(Solche f gibt es nach Urysohnschem Lemma). Dann definiert man fuer offenes U

$$\widetilde{\mu}(U) := \sup\{\widetilde{\mu}(K) : K \subset U, kpt\}.$$

Schliessliche definiert man fuer beliebiges E dann

$$\widetilde{\mu}(E) := \inf\{\widetilde{\mu}(V) : E \subset V, V \, offen\}.$$

Dann laesst sich zeigen, dass die Einschraenkung von $\widetilde{\mu}$ auf die Borelmengen ein Mass ist. Dieses Mass hat dann (mehr oder weniger nach Konstruktion) die genannten Regulaeritaetseigenschaften und erfuellt $(*)$. $\square$

Bemerkungen.

- Ein Mass μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ fuer alle $f \in C_c(X)$ heisst *Darstellungsmaß* fuer Λ. Im allgemeinen gibt es mehrere Darstellungsmaße.
- Ist μ ein Darstellungsmaß, so hat jedes kompakte K endliches Mass, da es (nach dem Urysohnschen Lemma) Funktionen $f \in C_c(X)$ gibt mit $f \geq 0$ und $f \geq 1_K$. Ein Darstellungsmaß ist also automatisch ein Borelmaß.
- Der Satz behauptet NICHT die Existenz oder Eindeutigkeit eines regulaeren Darstellungsmaßes. Das ist unbefriedigend, aber nicht zu aendern (da es Beispiele gibt, in denen das angegebene μ nicht von innen regulaer ist (s.u.)). Wir werden aber weiter unten sehen, dass
  - im Falle kompakter Raeume Regularitaet gilt (es also ein eindeutiges regulaeres Darstellungsmaß gibt),
  - und im Fall von Raeumen mit starken Abzaehlbarkeitseigenschaften der Topologie die Regulaeritaet jedes Darstellungsmaßes gilt (und es damit ein eindeutiges Darstellungsmaß gibt).
- In der Situation des Theorem ist $C_c(X)$ dicht in L^p. Genauer gilt folgendes: Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch und ν ein Borelmaß auf X, so dass gilt
  - ν ist von aussen regulaer.
  - ν ist 'fuer offenen Mengen von Innen regulaer'.

  Dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(X, \nu)$ fuer $1 \leq p < \infty$. Insbesondere ist dann also ν durch seine Werte auf $C_c(X)$ eindeutig bestimmt. (Wir geben hier keinen Beweis, verweisen aber auf den Beweis des Approximationssatz in Abschnitt 1 fuer einen verwandten Schluss.)

Das Theorem behandelt eine sehr allgemeine Situation. In etwas spezielleren Situationen erhaelt man staerkere Aussagen. Wir werden zwei solche Situationen naeher betrachten:

- X ist kompakt.
- Die Topologie von X hat starke Abzaehlbarkeitseigenschaften.

Fuer kompakte Raeume halten wir zunaechst noch folgende Stetigkeitseigenschaft positiver Funktionale fest.

LEMMA. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann ist Λ stetig (bzgl. der Supremumnorm, $\|\cdot\|_\infty$, auf $C(X)$).*

Bemerkung. Damit wird dann das Studium positiver Funktionale ein Teil des Studiums stetiger Funktionale. Diesen Aspekt werden wir im kommenden Abschnitt wieder aufgreifen.

Beweis. Wir muessen $C \geq 0$ mit $|\Lambda(f)| \leq C\|f\|_\infty$ finden. Wir betrachten zunaechst reellwertige f. Fuer solche f gilt

$$-\|f\|_\infty 1 \leq f \leq \|f\|_\infty 1$$

mit der konstanten Funktion 1 auf X. Anwenden von Λ liefert (unter Nutzen der Positivitaet) dann

$$-\|f\|_\infty \Lambda(1) \leq \Lambda(f) \leq \|f\|_\infty \Lambda(1)$$

also

$$|\Lambda(f)| \leq \|f\|_\infty \Lambda(1).$$

(Hier wurde die Kompaktheit in Form von $1 \in C(X)$ genutzt.) Fuer allgemeine f mit $f = u + iv$ mit reellwertigen u, v in $C(X)$ schliessen wir dann

$$|\Lambda(f)| = |\Lambda(u) + i\Lambda(v)| \leq \Lambda(1)(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \leq 2\Lambda(1)\|f\|_\infty.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Theorem (Satz von Riesz fuer kompakte Raeume). *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann gibt es ein eindeutiges regulaeres Maß μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ fuer alle $f \in C(X)$. Es ist μ endlich (also insbesondere ein Borelmaß) mit*

$$\mu(X) = \Lambda(1) = \|\Lambda\|.$$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von μ folgen sofort aus dem vorigen Satz. Dabei nutzen wir, dass fuer kompaktes X natuerlich $C(X) = C_c(X)$ gilt und aus der Endlichkeit von $\mu(X) = \Lambda(1)$ auch die Endlichkeit des Masses von jeder messbaren Teilmenge von X folgt und man damit auch die innere Regulaeritaet aus dem vorigen Satz schliessen kann.

Zur letzten Aussage: Die erste Gleichung ist klar. Die Abschaetzung $\leq$ der zweiten Gleichung ist klar. Die Abschaetzung $\geq$ der zweiten Gleichung folgt sofort aus der Dreiecksungleichung der Integration. $\square$

Wir halten auch noch folgende Variante fest.

Theorem (Positive Funktionale auf $C_0(X)$). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv (d.h. $\Lambda(f) \geq 0$ fuer $f \geq 0$). Dann ist Λ stetig und es existiert ein eindeutiges regulaeres endliches Mass μ auf X mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ fuer alle $f \in C_0(X)$. Es gilt*

$$\mu(X) = \|\Lambda\|_\infty.$$

Beweis. Man macht sich zunaechst klar, dass Λ stetig ist (vgl. Uebung). Dazu reicht es zu zeigen, dass ein $C > 0$ existiert mit $\Lambda(f) \leq C\|f\|_\infty$ fuer alle $f \in C_0(X)$ mit $f \geq 0$. Das sieht man leicht durch einen Widerspruchsbeweis. (Angenommen nein. $\Lambda(f_n) \geq n^2 \|f_n\|_\infty$. Ohne Einschraenkung $\|f_n\|_\infty = 1$ alle n. Setze $f := \sum \frac{1}{n^2} f_n$. Dann gehoert f zu $C_0(X)$ und es gilt $\Lambda(f) \geq N$ fuer jedes $N \in \mathbb{N}$.)

Wir betrachten nun die Einpunktkompaktifizierung $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ von X. Dann laesst sich jedes $f \in C(\widetilde{X})$ eindeutig schreiben als

$$f = (f - f(\infty)1) + f(\infty)1,$$

wobei 1 wieder die konstante Funktion mit Wert 1 bezeichnet. Sei g die Einschraenkung der Funktion $f - f(\infty)1$ auf X.

Behauptung. Es gehoert g zu $C_0(X)$.

Beweis der Behauptung: Die Funktion $\widetilde{g} = f - f(\infty)1$ auf $\widetilde{X}$ ist stetig (als Differenz stetiger Funktionen) mit $\widetilde{g}(\infty) = 0$. Damit gibt es dann also fuer jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von ∞ mit

$$|\widetilde{g}(x)| = |\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(\infty)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $x \in U$. Damit ist dann g stetig mit $|g(x)| \leq \varepsilon$ fuer alle x aus $U \cap X$. Da $X \setminus U$ kompakt ist (nach Definition der Topologie auf $\widetilde{X}$) gehoert dann g zu $C_0(X)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Damit koennen wir dann auf $C(\widetilde{X})$ ein lineares Funktional $\widetilde{\Lambda}$ definieren durch

$$\widetilde{\Lambda}(f) = \Lambda(g) + f(\infty)\|\Lambda\|.$$

Ende der Vorlesung

Behauptung. Es ist $\widetilde{\Lambda}$ positiv und linear.
Beweis der Behauptung: Offenbar ist $\widetilde{\Lambda}$ linear. Sei $0 \leq f$ gegeben.
Setze

$$g := (f - f(\infty)1) = g_+ - g_-$$

mit dem Positiv- und Negativteil $g_\pm$ von g. Dann folgt aus

$$0 \leq f = (f - f(\infty)1) + f(\infty)1 = g_+ - g_- + f(\infty)$$

sofort

$$\|g_-\|_\infty \leq f(\infty)$$

(da die Traeger von g_- und g_+ 'disjunkt' sind). Wegen der Positivitaet von Λ gilt weiterhin $\Lambda(g_\pm) \geq 0$. Wegen der Beschraenktheit von Λ folgt schliesslich auch $0 \leq \Lambda(g_-) = |\Lambda(g_-)| \leq \|\Lambda\| \|g_-\|_\infty$ also auch

$$-\Lambda(g_-) \geq -\|\Lambda\| \|g_-\|_\infty.$$

Setzt man das zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}(f) &= \Lambda(g) + \|\Lambda\| f(\infty) \\
&= \Lambda(g_+) - \Lambda(g_-) + \|\Lambda\| f(\infty) \\
(\Lambda(g_+) \geq 0) \quad &\geq -\Lambda(g_-) + \|\Lambda\| f(\infty) \\
(-\Lambda(g_-) \geq -\|\Lambda\| \|g_-\|_\infty) \quad &\geq -\|\Lambda\| \|g_-\|_\infty + \|\Lambda\| f(\infty) \\
&= \|\Lambda\|(-\|g_-\|_\infty + f(\infty)) \\
(\|g_-\|_\infty \leq f(\infty)) \quad &\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Damit gibt es also nach dem Satz von Riesz fuer kompakte Raeume ein eindeutiges regulaeres Borelmaß $\widetilde{\mu}$ auf $\widetilde{X}$ mit

$$\widetilde{\Lambda}(f) = \int f d\widetilde{\mu}$$

fuer alle $f \in C(\widetilde{X})$ und dieses Mass ist endlich. Mit der Einschraenkung μ von $\widetilde{\mu}$ auf X gilt also fuer alle $g \in C_0(X)$

$$\Lambda(g) = \widetilde{\Lambda}(g) = \int g d\widetilde{\mu} = \int g d\mu.$$

(Dabei benutzen wir im letzten Schritt, dass g auf ∞ verschwindet.) Weiterhin ist μ endlich (da offenbar gilt $\mu(X) \leq \widetilde{\mu}(\widetilde{X}) < \infty$). Nach der Dreiecksungleichung der Integration gilt dann

$$|\Lambda(g)| \leq \|g\|_\infty \mu(X)$$

fuer alle $g \in C_0(X)$. Damit folgt also

$$\|\Lambda\| \leq \mu(X).$$

Setzt man andererseits $f \equiv 1$ (also $f = g + f(\infty)1$ mit $g = 0$ und $f(\infty) = 1$) in $\widetilde{\Lambda}$ ein, so ergibt sich

$$\mu(X) \leq \widetilde{\mu}(\widetilde{X}) = \widetilde{\Lambda}(f) = \|\Lambda\|.$$

(Dabei haben wir in der letzten Gleicheit die Definition von $\widetilde{\Lambda}$ genutzt). Insgesamt folgt also $\mu(X) = \|\Lambda\|$. $\square$

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass das Mass $\widetilde{\mu}$ in dem Punkt ∞ keine Masse hat (da die Gesamtmasse von $\widetilde{\mu}$ gerade $\|\Lambda\| = \mu(X)$ ist).

Wir untersuchen nun den Fall, dass die Topologie auf X starke Abzaehlbarkeitseigenschaften hat. In diesem Fall sind die Regulaeritaetseigenschaften eines Masses automatisch erfuellt, wenn es auf Kompakta endlich ist. Wir **erinnern** daran, dass ein Topologie ein *endliche Basis* hat, wenn es eine abzaehlbare Familie von offenen Mengen gibt, so dass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus dieser Familie ist.

LEMMA (Automatische Regulaeritaet von Massen). *Sei X ein lokalkompakter Haussdorffraum mit abzaehlbarer Basis der Topologie. Sei μ ein Borelmaß auf X. Dann ist μ regulaer.*

Beweis. Das ist gerade Satz 29.12 in Heinz Bauer *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter (1990)). $\square$

Beispiele fuer Raeume mit abzaehlbarer Basis der Topologie.

- Ist X kompakt und metrisierbar, so ist die Topologie durch eine abzaehlbare Basis der Topologie erzeugt. (Uebung)
- Die Topologie des Euklidischen Raumes hat eine abzaehlbare Basis der Topologie. (Kugeln mit rationalen Radien um rationale Punkte...)

Mit dem vorangehenden Lemma ergibt sich aus dem Rieszschen Darstellungssatz sofort:

THEOREM (Rieszscher Darstellungsatz fuer Raeume mit abzaehlbarer Basis der Topologie). *Sei X ein lokalkompakter Haussdorffraum mit abzaehlbarer Basis der Topologie. Dann existiert zu jedem positiven linearen Funktional $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein eindeutiges Borelmaß μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$.*

Bemerkung. Fuer viele Anwendungen ist die Voraussetzung der abzaehlbaren Basis der Topologie erfuellt. In dieser Situation ist dann nach dem vorigen Satz die Abbildung

$$\text{Borelmaße} \longrightarrow \text{Positive lineare Funktionale auf } C_c(X), \mu \mapsto \Lambda_\mu,$$

mit

$$\Lambda_\mu(f) := \int f d\mu \text{ fuer } f \in C_c(X)$$

eine Bijektion.

Beispiele.

- Sei $c_c = c_c(\mathbb{N})$ und $\Lambda : c_c \longrightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) = \sum f(x)$. Dann ist $\Lambda(f) = \int f d\mu$ mit dem Zaehlmass μ.
- Sei $\Lambda : C_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) :=$ Riemanintetgral von f. Dann ist $\Lambda(f) = \int f d\lambda$ mit dem Lebesguemass Λ.

- Haarmass auf lokalkompakten Gruppen G wird ueblicherweise ueber ein lineares translationsinvariantes Funktional auf $C_c(G)$ konstruiert.

Gegenbeispiele. Sei $X_1 = \mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie und $X_2 = \mathbb{R}$ mit der ueblichen Topologie und $X = X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie. (Zeichnung). Dann gilt:

$U \subset X$offen $\Longleftrightarrow p^{-1}(\{x\}) \cap U$offen in $\mathbb{R}$ bzgl ueblicher Topologie fuer jedes $x \in \mathbb{R}$.

(Hier ist p die Projektion auf die X_1-Komponente.) Damit ist $K \subset X$ genau dann kompakt wenn $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und kompakte (in der ueblichen Topologie) Teilmengen $K_1, \ldots, K_n \subset \mathbb{R}$ existieren mit

$$K = \cup_{j=1}^n \{x_j\} \times K_j.$$

Insbesondere ist X lokalkompakt und hausdorffsch. Die Abbildung

$$\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

ist wohldefiniert (nur endlich viele Summanden, da f kompakten Traeger hat). Das zugehoerige Mass ist auf Kompakta gegeben durch

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda|_{\{x\} \times \mathbb{R}}.$$

Fuer

$$T = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

gilt also

$$\mu(K) = 0 \text{ fuer jedes } K \subset T \text{ kompakt}$$
$$\mu(U) = \infty \text{ fuer jedes } T \subset U \text{ offen.}$$

Es ist μ also nicht regulaer, sondern nur von aussen regulaer. (Nach Satz ist μ von aussen regulaer.)

Ende der Vorlesung

5. Der Vektorraum der regulaeren Borelmaße

Erinnerung. Absolute Variation eines Masses: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Raum mit einer Sigma-Algebra. Ein komplexes Mass μ ist eine σ-additive Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Das heisst, dass fuer jedes Folge (A_j) disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu(\cup A_j) = \sum \mu(A_j)$$

mit absolut konvergenter Summe. Die *absolute Variation* $|\mu|$ von μ ist definiert durch

$$|\mu|(A) := \sup\{\sum_j |\mu(A_j)| : A = \cup_j A_j \text{ mit } A_j \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $|\mu|$ ein beschraenktes Mass auf X mit

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$$

fuer alle messbaren E (und es ist $|\mu|$ das kleinste Mass auf X mit dieser Eigenschaft).

Wir betrachten nun die Gesamtheit aller komplexen Masse.

PROPOSITION (Vektorraum der komplexen Maße). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann bilden die komplexen Maße auf X einen Vektorraum und es gilt fuer $a, b \in \mathbb{C}$ und μ, ν komplexe Borelmaße fuer jedes messbare $E \in X$*

$$|a\mu + b\nu|(E) \leq |a||\mu|(E) + |b||\nu|(E).$$

Insbesondere wird dieser Vektorraum durch

$$\|\mu\| := |\mu|(X)$$

zu einem normierten Raum.

Bemerkung. Der Vektorraum ist sogar vollstaendig (Uebung).

Beweis. Offenbar bilden die komplexen Masse einen Vektorraum. Die angegebene Ungleichung ist einfach zu zeigen unter Betrachtung von Zerlegung betrachten. Damit folgen die Normeigenschaften leicht. □

LEMMA (Polarzerlegung der komplexen Borelmaße). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein komplexes Mass auf X. Dann existiert ein (bis auf $|\mu|$-Nullmengen eindeutig bestimmtes) messbares $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ in $L^1(X, |\mu|)$ mit $d\mu = hd|\mu|$ d.h.*

$$\mu(A) = \int 1_A hd|\mu|$$

fuer alle messbaren A. Weiterhin gilt $|h| \equiv 1$. Gilt umgekehrt $\mu = hd\nu$ mit $|h| \equiv 1$ und ν positiv, so folgt $|\mu| = \nu$.

Bemerkung. Das Lemma liefert eine Existenzaussage und die Eindeutigkeit der Polarzerlegung d.h. des Paares (h, ν) mit ν positives Mass, $|h| \equiv 1$, ν fast sicher und $\mu = hd\nu$.
Beweis. Zunaechst zur ersten Aussage.
Existenz. Wir zeigen zunaechst die Existenz eines h in $L^1(|\mu|)$ mit $\mu = h|\mu|$. Offenbar gilt fuer jedes messbare A

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A).$$

Damit folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym fuer komplexe Masse sofort die Existenz eines solchen h.
(Falls nur der Satz von Radon-Nikodym fuer positive Masse bekannt ist, kann man auch so vorgehen: Sei ohne Einschraenkung μ reellwertig (sonst Zerlegen in Realteil und Imaginaerteil). Sei $\nu := \mu + |\mu|$. Dann ist (offenbar) ν ein positives endliches Mass und $\nu << |\mu|$. Damit gibt es also nach dem Satz von Radon/Nikodym ein $\widetilde{h} \in L^1(X, |\mu|)$ mit

$$\nu = \mu + |\mu| = \widetilde{h}d|\mu|$$

und es folgt auch in diesem Fall

$$\mu = h|\mu|$$

mit $h = \widetilde{h} - 1$.)
Es bleibt $|h| \equiv 1$ zu zeigen. Sei dazu fuer $0 < r < 1$ die Menge A_r definiert durch

$$A_r := \{x : |h(x)| \leq r\}.$$

Dann folgt aus $\mu = h|\mu|$ durch Betrachten von Zerlegungen

$$|\mu|(A_r) \leq r|\mu(A_r)|.$$

Wegen $0 < r < 1$ ergibt sich also $|\mu|(A_r) = 0$. Aehnlich (aber etwas komplizierter) folgt

$$|\mu|(B_r) = 0$$

fuer

$$B_r := \{x : |h(x)| \geq r\}$$

fuer $r > 1$. Damit folgt die Aussage fuer (eine ggf auf einer Nullmenge geeignet modifizierte Version von) h.

Eindeutigkeit. Seien h_1 und h_2 solche Funktionen. Dann gilt

$$0 = \mu(A) - \mu(A) = \int 1_A(h_1 - h_2)d|\mu|$$

fuer alle messbaren A. Damit folgt $h_1 = h_1$ $|\mu|$ fast ueberall durch Betrachten von Mengen der Form

$$A = \{x : \Re(h_1 - h_2)(x) > \frac{1}{n}\} \text{ bzw. } A = \{x : \Im(h_1 - h_2) > \frac{1}{n}\}.$$

fuer natuerliche Zahlen n (bzw. die durch Vertauschen von h_1 und h_2 entstehenden Mengen.

Zur letzten Aussage: Offenbar gilt $|\mu|(A) \leq \nu(A)$ fuer alle messbaren A (da $|h| \equiv 1$.) Zerlegt man umgekehrt A in Teilmengen auf denen h sich beliebig wenig aendert, so kann man (vgl. Uebung) auch

$$|\mu|(A) \geq \nu(A)$$

zeigen. Damit folgt dann $\nu = |\mu|$. □

Folgerung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann kann man jedes komplexe Borelmaß μ schreiben als*

$$\mu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$$

mit positiven endlichen Borelmaßen ν_j.

Beweis. Das folgt direkt aus einer entsprechenden Zerlegung von h. □

Bemerkung. Damit haben wir jetzt drei verschiedene Zugaengen zu komplexen Massen:

- Komplexwertige σ-additive Funktionen.
- Masse der Form $h\nu$ mit ν positives endliches Mass und $|h| \equiv 1$ ν fast sicher.
- Linearkombination endlicher positiver Masse.

Nach diesem Lemma koennen wir nun folgendes definieren.

Definition (Integration bzgl. komplexer Masse). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und μ ein komplexes Maß mit $\mu = h|\mu|$ fuer ein messbares h. Dann definiert man fuer beschraenkte messbare f*

$$\int f d\mu := \int f h d|\mu|.$$

Ende der Vorlesung

6. Der Dualraum von $C(X)$

Wir betrachten nun die spezielle Situation eines lokalkompakten Hausdorffraumes. Weiter oben haben wir fuer einen kompakten Hausdorffraum X die positive Funktionale auf $C(X)$ studiert. Diese sind automatisch stetig und gerade gegeben durch die positiven regulaeren Borelmasse. (Wir haben ausserdem gesehen, dass Regulaeritaet automatisch gilt, wenn die Topologie eine abzaehlbare Basis hat und, dass noch allgemeiner Aussagen fuer positive Funktinoale auf $C_c(X)$ gelten.) In diesem Abschnitt studieren wir den Dualraum von $C(X)$ d.h. den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $C(X)$.

Definition. *Sei (X,τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Sei μ ein komplexes Borelmaß auf X. Dann heisst μ regulaer, wenn $|\mu|$ regulaer ist.*

Folgerung (Vektorraum der regulaeren komplexen Borelmasse). *Sei (X,τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Dann bilden die regulaeren komplexen Borelmaße auf X einen Vektorraum mit Norm $\|\mu\| = |\mu|(X)$.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass Regulaeritaet unter Linearkombinationen erhalten bleibt: Sei $E \subset X$ messbar. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren aufgrund der Regularitaet von μ und ν also Kompakta K_1, K_2 und offene Mengen U_1, U_2 mit

$$K_i \subset E \subset U_i$$

und

$$|\mu|(E \setminus K_1) \leq \varepsilon,\ |\mu|(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon$$

und

$$|\nu|(E \setminus K_1) \leq \varepsilon,\ |\nu|(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Damit folgt (aus der Ungleichung)

$$|a\mu + b\nu|(E \setminus (K_1 \cup K_2)| \leq |a|\varepsilon + |b|\varepsilon$$

und

$$|a\mu + b\nu|((U_1 \cap U_2 \setminus E)| \leq |a|\varepsilon + |b|\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Regularitaet. □

Ist X kompakt und hausdorffsch und μ ein komplexes Borelmaß auf X, so ist

$$\Lambda_\mu : C(X) \longrightarrow \mathbb{C},\ \Lambda_\mu(f) = \int f d|\mu| = \int f h d|\mu|$$

ein lineares Funktional mit

$$|\Lambda(f)| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X).$$

Insbesondere ist also Λ stetig. Es gilt auch die Umkehrung.

Theorem (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei X kompakt und hausdorffsch. Dann ist die Abbildung*

$$\textit{Regulaere komplexe Borelmasse auf } X \longrightarrow C(X)',\ \mu \mapsto \Lambda_\mu,$$

bijektiv und isometrisch. (Es existiert also zu jedem stetigen Φ auf $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein eindeutiges regulaeres komplexes Borelmaß μ mit

$$\Phi(f) = \int f d\mu$$

fuer alle $f \in C(X)$ und es gilt $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.)

Bemerkung. Auch wenn μ nicht regulaer ist, liefert Λ_μ wie oben gesehen ein lineares stetiges Funktional. Die Regulaeritaet wird benoetigt, um die Eindeutigkeit zu erhalten.

Beweis. Wie schon diskutiert bildet Λ nach $C(X)^*$ ab.

Λ *ist injektiv.* Seien μ_1 und μ_2 Masse mit gewuenschten Eigenschaften. Dann ist $\mu = \mu_1 - \mu_2$ ein regulaeres Borelmaß mit $\mu(f) = 0$ fuer alle $f \in C(X)$.

Idee. Waehle (f_n) in $C(X)$ mit $f_n \to h$. Dann gilt

$$|\mu|(X) = \int \overline{h} d\mu = \lim \int f_n d\mu = 0.$$

Hier sind die Details: Sei h messbar mit $|h| \equiv 1$ und $\mu = h|\mu|$. Da $|\mu|$ regulaer ist, existieren (f_n) in $C(X)$ mit $f_n \to \overline{h}$ (s.o.) in $L^2(X, |\mu|)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\mu|(X) &= \int_X 1 d|\mu| \\
&= \int h\overline{h} d|\mu| \\
\left(\int f_n h d|\mu| = 0\right) \quad &= \int (\overline{h} - f_n) h d|\mu| \\
&= \left| \int (\overline{h} - f_n) h d|\mu| \right| \\
\text{(C.-S. Ugl.)} \quad &\leq \|\overline{h} - f_n\|_{L^2(|\mu|)} |\mu|(X)^{1/2} \\
&\to 0, n \to \infty
\end{aligned}$$

Damit folgt $|\mu| = 0$ und daher $\mu = 0$.

Es ist Λ surjektiv Wir schildern zunaechst kurz die **Idee.** Wir definieren zuerst ein positives Funktional Λ^* auf $C^+(X)$ mit

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda^*(|f|).$$

Da Λ^* positiv ist, liefert es uns ein regulaeres positives Mass $\nu = |\mu|$ nach dem schon bewiesenen Satz von Riesz und es gilt

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda^*(|f|) = \int |f| d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Damit gehoert dann Φ zu $L^\infty(\nu)$, d.h. es existiert ein $g \in L^\infty(\nu)$ mit

$$\Phi(f) = \int f g d\nu.$$

Dann ist $\mu = g\nu$ das gewuenschte regulaere Mass.

Hier sind die Details: Sei

$$\Lambda^* : C^+(X) := \{f \in C(X) : f \geq 0\} \longrightarrow [0, \infty)$$

definiert durch

$$\Lambda^*(f) := \sup\{|\Phi(h)| : h \in C(X), |h| \leq f\}.$$

(Diese Definition mag erst einmal verblueffen, laesst sich aber wie folgt gut motivieren:

- Gibt es ueberhaupt ein positives Λ^* mit $|\Phi(h)| \leq \Lambda^*(|h|)$ fuer alle h, so muss fuer jedes $f \geq 0$ und alle $h \in C(X)$ mit $|h| \leq f$ notwendig gelten
$$\Lambda^*(f) \geq \Lambda^*(|h|) \geq |\Phi(h)|.$$
Die angegebene Definition liefert also das 'minimale' moegliche Λ^*.
- Wenn es ueberhaupt ein regulaeres Mass μ gibt mit $\Phi(f) = \int f d\mu$, so muss (Uebung) gelten
$$\||\mu|(f) = \sup\{|\Phi(h)| : |h| \leq f\}.$$

Wir haben also eigentlich gar keine andere Wahl als diese Definition ;-)

Dann gilt fuer $f, g \geq 0$ und $c \geq 0$:

- $\Lambda^*(f) \geq 0$
- $\Lambda^*(cf) = c\Lambda(f)$ fuer $c \geq 0$.
- $\Lambda^*(f+g) = \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g)$ fuer $f, g \geq 0$.

(Die ersten beiden Punkte sind klar. Zum letzten Punkt: $\geq$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $h_1, h_2 \in C(X)$ mit

$$|h_1| \leq f \;\; |h_2| \leq g$$

und

$$\Lambda^*(f) \leq |\Phi(h_1)| + \varepsilon, \; \Lambda^*(g) \leq |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Waehle nun α_j mit $|\alpha_j| = 1$ und

$$|\Phi(h_j)| = \alpha_j \Phi(h_j)$$

$j = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g) &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon \\ &= \alpha_1\Phi(h_1) + \alpha_1\Phi(h_2) + 2\varepsilon \\ (\Phi \; linear) &= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda^*(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \\ (|h_1| + |h_2| \leq f + g) &\leq \Lambda^*(f+g) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\leq$: Sei $h \in C(X)$ mit $|h| \leq f + g$. Sei

$$V := \{x \in X : f(x) + g(x) > 0\}.$$

Dann ist V offen. Definiere nun

$$h_1 := \frac{h}{f+g} f \;\text{ und }\; h_2 = \frac{h}{f+g} g$$

auf V und $h_1 = h_2 = 0$ auf $X \setminus V$. Dann sind h_1 und h_2 stetig (NR! $|h_j| \leq |h| \leq f + g$) mit

$$h_1 + h_2 = h \;\text{ und }\; |h_1| \leq f, \;\; |h_2| \leq g.$$

Dann gilt

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1 + h_2)| \leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leq \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g).$$

Nach Bilden des Supremum folgt die gewuenschte Ungleichung.)
Nun setzen wir Λ^* auf $C(X)$ fort: Sei $f \in C(X)$. Dann zerlegt man f in

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$$

mit $f_i \geq 0$ und definiert

$$\Lambda(f) := \Lambda^*(f_1) - \Lambda^*(f_2) + i\Lambda^*(f_3) - i\Lambda^*(f_4).$$

Das ist wohldefiniert (!). Damit folgt dann leicht, dass Λ auch linear ist.
(!Wohldefiniert: $f_1 - f_2 + if_3 - if_4 = g_1 - g_2 + ig_3 - ig_4$ mit $f_j, g_j \geq 0$. Dann gilt

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2, \;\; f_3 + g_4 = g_3 + f_4.$$

Damit folgt aus der Linearitaet von Λ^* also

$$\Lambda^*(f_1) + \Lambda^*(g_2) = \Lambda^*(g_1) + \Lambda^*(f_2)...$$

Das liefert die Wohldefiniertheit.)
Nun wendet man den Satz von Riesz an. Das liefert die Existenz eines regulaeren positiven ν mit

$$\Lambda^*(f) = \int f d\nu$$

fuer alle $f \in C(X)$.

Es geht nun darum das urspruengliche Φ zu rekonstruieren und ein geeignetes h zu bestimmen. Wir betrachten also wieder

$$\Phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Dann gilt nach Definition von Λ und ν

$$|\Phi(f)| \leq \sup\{|\Phi(h)| : h \in C(X) \text{mit } |h| \leq |f|\} = \Lambda^*(|f|) = \int |f| d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Damit ist also Φ ein stetiges (durch $\|\cdot\|_{L^1}$ beschraenktes) Funktional auf einem Teilraum von $L^1(\nu)$. Dann kann man Φ mit Hahn-Banach zu einem stetigen durch $\|\cdot\|_{L^1}$ beschraenktes Funktional auf ganz L^1 fortsetzen. Damit existiert also ein $g \in L^\infty(\nu)$ mit $\|g\|_\infty \leq 1$ und

$$\Phi(f) = \int f g d\nu$$

fuer alle $f \in C(X)$. Insbesondere gilt nach Definition von Λ und ν

$$\int |g| d\nu \geq \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} = \Lambda^*(1) = \nu(X).$$

Damit folgt dann (wegen $\|g\|_\infty \leq 1$) also $|g| \equiv 1$ ν fast sicher. Setzt man nun $\mu = g\nu$, so ist μ ein komplexes Mass und es ist $\mu = g\nu$ die Polarzerlegung von μ. Damit gilt insbesondere $|\mu| = \nu$ und es ist μ regulaer. Weiterhin gilt nach Definition

$$\Phi(f) = \int f g d\nu = \int f d\mu = \Lambda_\mu(f)$$

fuer alle $f \in C(X)$.

Es ist Λ isometrisch. Wir kommen nun zur Aussage ueber die Norm: Es gilt

$$\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} = \Lambda(1) = \nu(X) = |\mu|(X).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

FOLGERUNG. *Sei X lokalkompakt und haussdorffsch. Sei $\Phi : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann existiert ein eindeutiges regulaeres Borelmaß μ auf X mit*

$$\Phi(f) = \int f d\mu$$

fuer jedes $f \in C_0(X)$. Es gilt

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Beweis. Eindeutigkeit. Wie oben.
Zur Norm. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi\| &= \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} \\ &= \sup\{\int fhd|\mu| : ..\} \\ &= |\mu|(X). \end{aligned}$$

Existenz. Sei X^+ die Einpunktkompaktifizierung von X. Dann laesst sich $C_0(X)$ auffassen als Teilalgebra von $C(X)$. Mit Hahn-Banach kann man weiterhin das Funktional Φ unter Erhaltung der Norm zu einem Funktional Φ auf ganz $C(X^+)$ fortsetzen. Dieses ist nach dem Satz von Riesz durch ein regulaere Borelmaß μ^+ auf X^+ gegeben. Die Einschraenkung von μ^+ auf X liefert das gewuenschte Borelmaß. □

Bemerkung. Es gilt tatsaeechlich $\mu^+(\{\infty\}) = 0$. (Denn

$$\|\Phi\| = \mu(X) \leq \mu^+(X^+) = \mu^+(X) + \mu^+(\{\infty\}) = \|\Phi^+\| = \|\Phi\|.)$$

FOLGERUNG. *Sei X ein lokalkompaker Hausdorffraum. Dann ist der Raum der regulaeren Borelmaße auf X mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es handelt sich gerade um den Dualraum von $C_0(X)$ mit der Supremumnorm. □

Bemerkung: Dualraeume von $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X)$ fuer nichtkompakte, lokalkompaktes, hausdorffsches X.

- Der Dualraum von $C_b(X)$ laesst sich wie folgt bestimmen: Es gilt $C_b(X) = C(X_{SC})$ mit der Stone/Czech Kompaktifizierung X_{SC}. Tatsaechlich ist des gerade die Stone/Czech Kompaktifizierung gerade dadurch charakterisiert, dass diese Gleicheit gilt. Damit ist dann der Dualraum von $C_b(X)$ genau der Dualraum von $C(X_{SC})$ und besteht also aus den regulaeren komplexen Massen auf X_{SC}.
- Den Dualraum von $C_0(X)$ haben wir in der Folgerung oben bestimmt.
- Der Dualraum von $C_c(X)$ ist etwas aufwaendiger zu bestimmen. Tatsaechlich ist zunaechst nicht einmal die Frage klar, da wir festlegen muessen, welche Topologie wir auf $C_c(X)$ verwenden wollen. Betrachtet man $C_c(X)$ mit der Supremumsnorm, so ist $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$ und man erhaelt dann gerade wieder den Dualraum von $C_0(X)$. Typischerweise stattet man aber $C_c(X)$ mit der sogenannte

induktiven Limes Topologie aus. Dann besteht der Dualraum aus gewissen unbeschraenkten Massen.

Ende der Vorlesung

KAPITEL 7

Netze, Filter und der Satz von Tychonoff

In einem topologischen Raum, dessen Umgebungsbasen nicht abzaehlbar sind, kann Konvergenz nicht adaquat mit Folgen beschrieben werden. In diesem Abschnitt lernen wir Netze kennen. Diese sind eine Verallgemeinerung von Folgen und koennen in topologischen Raeumen (ohne Abzaehlbarkeitseigenschaften) verwendet werden. Als Anwendung wird der Satz von Tychonoff bewiesen.

1. Netze

DEFINITION. *(a) Eine Relation $\prec$ auf einer Menge heisst Halbordnung, wenn sie*

- *transitiv ist ($x \prec y$ und $y \prec z$ impliziert $x \prec z$)*
- *reflexiv ist ($x \prec x$).*

(b) Eine halbgeordnete Menge $(\Lambda, \prec)$ heisst aufwaerts filtrierend, wenn zu allen $x, y \in \Lambda$ ein $z \in \Lambda$ existiert mit $x \prec z$ und $y \prec z$.

Notation. Oft wird eine halbgeordnete aufwaerts filtrierende Menge als *gerichtet* bezeichnet. Manchmal wird in der Definition einer Halbordnung noch die *Antisymmetrie* ($x \prec y$ und $y \prec x$ impliziert $x = y$) dazugenommen.

DEFINITION. *Ein Netz in einer Menge X ist ein Paar (Λ, ι) bestehend aus einer halbgeordneten aufwaerts filtrierenden Menge Λ und einer Abbildung $\iota : \Lambda \to X$.*

Notation. Ist (Λ, ι) ein Netz, so setzt man $x_\lambda := \iota(\lambda)$ und schreibt $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ fuer das Netz.

Beispiel (Folgen) Die Menge $\mathbb{N}$ mit $\leq$ ist halbgeordnet und aufwaerts filtrierend. Ein Netz auf $\mathbb{N}$ ist gerade eine Folge.

Beispiel.(Netze auf Umgebungen) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{O}_x$ die Menge der Umgebungen von $x \in X$. Dann ist $\mathcal{O}_x$ mit $U \prec V$ falls $V \subset U$ eine halbgeordente aufwaerts filtrierende Menge. Eine Abbildung $\iota : \mathcal{O}_x \longrightarrow X$ ist dann ein Netz. Waehlt (!) man zum Beispiel zu jedem $U \in \mathcal{O}$ ein $x_U \in U$, so ergibt sich das Netz

$$\mathcal{O}_x \longrightarrow X, U \mapsto x_U.$$

Beispiel. (Netze ueber Zerlegungen) Sei $I = [0, 1]$. Die Menge der Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ des Intervals I ist bezgl. der Inklusion eine aufwaerts filtrierende halbgeordete Menge $\mathcal{Z}$. Zu jeder Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ kann man dann das Netz $\mathcal{Z}_f$ mit

$$\mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, Z \mapsto \sum_{j=1}^{n} (f(t_j) - f(t_{j-1}))(t_j - t_{j-1})$$

assoziieren (vgl. Uebung).

Definition. *Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Netz in X und $Y \subset X$.*
(a) Es heisst (x_λ) schliesslich in Y, wenn ein $\lambda_Y \in \Lambda$ existiert mit $x_\lambda \in Y$ fuer alle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda_Y \prec \lambda$.
(b) Es heisst (x_λ) hauefig in Y, wenn zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein μ mit $\lambda \prec \mu$ existiert mit $x_\mu \in Y$.

Definition (Konvergenz eines Netzes). *Sei X ein topologischer Raum und (x_λ) ein Netz in X. Dann heisst (x_λ) konvergent gegen x, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{O}_x$ schliesslich in U ist. Ein $x \in X$ heisst Hauefungspunkt von (x_λ), wenn (x_λ) in jedem $U \in \mathcal{O}_x$ hauefig ist.*

Notation. Wir schreiben $x_\lambda \to x$ oder $\lim x_\lambda = x$, wenn das Netz (x_λ) gegen x konvergiert.

Netze koennen in topologischen Raeumen so eingesetzt werden wie Folgen in metrischen Raeumen:

Proposition. *Seien (X, τ) und (X', τ') topologische Raeume und $f : X \longrightarrow X'$ gegeben. Fuer $x \in X$ sind aequivalent:*
- (i) *Es ist f stetig in x.*
- (ii) *$f(x_\lambda) \to f(x)$ fuer jedes $x_\lambda \to x$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $U \in \mathcal{O}_{f(x)}$ beliebig. Dann existiert nach (i) ein $V \in \mathcal{O}_x$ mit $f(V) \subset U$. Wegen $x_\lambda \to x$, existiert ein λ_V mit $x_\lambda \in V$ fuer $\lambda_V \prec \lambda$. Das liefert

$$f(x_\lambda) \in f(V) \subset U$$

fuer $\lambda_V \prec \lambda$. Das liefert (ii).
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $U \in \mathcal{O}_{(f(x)}$ beliebig. Angenommen: Es gibt ekein $V \in \mathcal{O}_x$ mit $f(V) \subset U$. Dann gibt es also zu jedem $V \in \mathcal{O}_x$ ein $x_V \in V$ mit $f(x_V) \notin U$. Betrachte nun das Netz $(x_V)_{V \in \mathcal{O}_x}$. Dann gilt nach Konstruktion

$$x_V \to x \text{ aber nicht } \quad f(x_V) \to f(x).$$

Das ist ein Widerspruch. □

Proposition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann ist $A \subset X$ abgeschlossen genau dann, wenn jeder Grenzwert eines Netz in A auch zu A gehoert.*

Beweis. Sei A abgeschlossen. Sei (x_λ) ein Netz in A mit $x_\lambda \to x$. Waere x nicht in A, so waere $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x. Damit muesste $x_\lambda \in X \setminus A$ gelten fuer 'grosse' λ. Widerspruch.
Es habe umgekehrt A die genannte Eigenschaft bzgl. Netzen. Wir zeigen, dass das Komplement von A offen ist. Sei $x \in X \setminus A$. Waere in jeder Umgebung von x ein Punkt von A, so gaebe es ein Netz in A, das gegen x konvergiert. Damit gehoerte dann x zu A. Widerspruch. □

Folgerung. *Sei* (X,τ) *ein topologischer Raum. Sei* $S \subset X$*. Dann ist*

$$\overline{S} = \{x \in X : \textit{es existiert Netz } (x_\lambda) \textit{ in } S \textit{ mit } x_\lambda \to x\}.$$

Beweis. (Uebung) □

Wir kommen nun zum Analogon von Teilfolgen.

Definition (Teilnetz). *Ein Teilnetz des Netz* (Λ,ι) *in* X *ist ein Netz* (M,j) *zusammen mit einer Abbildung* $h : M \longrightarrow \Lambda$ *so dass gilt:*

- $j = \iota \circ h$ *(Zeichnung)*
- *fuer jedes* $\lambda \in \Lambda$ *existiert in* $\mu_\lambda \in M$ *mit* $\lambda \prec h(\mu)$ *fuer jedes* $\mu \in M$ *mit* $\mu_\lambda \prec \mu$.

Bemerkungen.

- Es muss h nicht monoton sein d.h. $h(\mu) \prec h(\nu)$ erfuellen fuer $\mu \prec \nu$.
- Sogar wenn h monoton ist, impliziert die erste Eigenschaft nicht die zweite Eigenschaft. (Uebung)
- Eine Teilfolge (x_{l_k}) einer Folge (x_n) ist gegeben durch eine streng monoton wachsende Abbildung $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Aufgrund der Struktur von $\mathbb{N}$ ist dann die zweite Eigenschaft automatisch.
- Ein Teilnetz einer Folge muss keine Folge sein (s.u.).

Wir kommen nun zum sogenannten Fundamentallemma.

Lemma (Fundamentallemma). *Sei* X *eine Menge. Sei* $\mathcal{B}$ *ein System von Teilmenge von* X*, das aufwaerts filtrierend unter umgekehrter Inklusion ist (d.h. zu* $A, B \in \mathcal{B}$ *existiert ein* $C \in \mathcal{B}$ *mit* $C \subset A \cap B$*.) Ist das Netz* (x_λ) *haeufig in jedem* $B \in \mathcal{B}$*, so existiert ein Teilnetz* $(x_{h(\mu)})$*, das schliesslich in jedem* $B \in \mathcal{B}$ *ist.*

Beweis. Wir muessen eine aufwaerts filtrierende Menge zusammen mit einer geeigneten Abbildung konstruieren: Betrachte die Menge

$$M := \{(\lambda, B) \in \Lambda \times \mathcal{B} : x_\lambda \in B\}$$

mit der Halbordnung

$$(\lambda, B) \prec (\lambda', B') \Longleftrightarrow \lambda \prec \lambda' \text{ und } B' \subset B.$$

Dann ist $\prec$ aufwaerts filtrierend. (Bew. Seien (λ, U) und (μ, V) in M. Sei $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subset U \cap V$ gegeben. Sei ρ mit $\lambda, \mu \prec \rho$ gegeben. Da nach Voraussetzung (x_λ) haeufig in $W \in \mathcal{B}$ ist, existiert ein ν mit $\rho \prec \nu$ mit $x_\nu \in W$. Dann ist also $(\nu, W) \in M$ und $(\lambda, U), (\mu, V) \prec (\nu, W)$.)

Wir definieren nun

$$h : M \longrightarrow \Lambda \text{ durch } h(\lambda, U) := \lambda$$

und

$$j : M \longrightarrow X, \;\; \mu = (\lambda, U) \mapsto x_\lambda = x_{h(\mu)}.$$

Dann ist (M, j) mit h ein Teilnetz. (Bew. Es ist $j = \iota \circ h$ nach Konstruktion. Ist $\lambda \in \Lambda$ beliebig und $U \in \mathcal{B}$, so existiert nach Voraussetzung ein $\lambda \prec \nu$ mit $x_\nu \in U$. Damit ist insbesondere $(\nu, U) \in M$ und $h(\nu, U) = \nu$ mit $\lambda \prec \nu$.)

Nach Konstruktion von $(M, \prec)$ und h ist (M, j) schliesslich in jedem U aus B. □

FOLGERUNG (Charakterisierung Haeufungspunkt). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (x_λ) ein Netz in X. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist x ein Haeufungspunkt von (x_λ).*
(ii) *Es gibt ein Teilnetz von (x_λ), das gegen x konvergiert.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Setze $\mathcal{B} := \mathcal{O}_x(=$ Umgebungen von $x)$ und wende das Fundamentallemma an.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Eigentlich klar: Sei (M, j) mit h das entsprechende Teilnetz. Sei $U \in \mathcal{O}_x$. Dann existiert $\mu_U \in M$ mit $j(\mu) \in U$ fuer alle μ mit $\mu_U \prec \mu$. Sei nun $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Dann existiert (Teilnetz!) ein $\mu(\lambda) \in M$ mit$\lambda \prec h(\mu)$ fuer jedes μ mit $\mu(\lambda) \prec \mu$. Fuer μ mit $\mu_U, \mu(\lambda) \prec \mu$ gilt also $\lambda \prec h(\mu)$ sowie

$$x_{h(\mu)} = \iota \circ h(\mu) = j(\mu) \in U.$$

(Hier gilt die letzte Aussage , da $\mu_U \prec \mu$. $\square$