Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Montag 18.01.2010**

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto e^{-|x|}$.

(a) Untersuchen Sie, ob f in $\mathcal{S}$ enthalten ist.

(b) Berechnen Sie $g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x)dx$ für $k \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} g(k)dk$.

(2) Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten $c_k(f)$ von $f \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ riemann integrierbar und 2π-periodisch$\}$, $k \in \mathbb{Z}$ für $k \to \infty$ gegen 0 streben. Gehen Sie dazu in drei Schritten vor: Zeigen Sie die Aussage für

(a) charakteristische Funktionen,

(b) Treppenfunktionen,

(c) Funktionen aus $\mathcal{R}$.

(3) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Beweisen Sie, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle x, y \rangle|^2 \leq |\langle x, x \rangle||\langle y, y \rangle|$, $x, y \in H$ genau dann eine Gleichung liefert, wenn x und y linear abhängig sind.

(4) Es sei

$$\Omega = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi)\}.$$

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u : \Omega \to \mathbb{R},\ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mapsto r^\alpha \sin (\alpha\varphi)$$

harmonisch ist, d.h. $(\Delta u)(x, y) = 0$ für alle $x, y \in \Omega$.
Hinweis: Sie können den Laplaceoperator in Polarkoordinaten oder Funktionentheorie verwenden.

Zusatz

(Z1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$, wobei $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ falls $x \neq 0$ und 0 falls $x = 0$.

(a) Berechnen Sie $g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x)dx$ für $k \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} g(k)dk$.

(Z2) Sei U das Innere vom Abschluss von Ω aus Aufgabe 4, d.h. die ganze offene Kreisscheibe. Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion u auf U stetig fortssetzbar, zweimal stetig differenzierbar und harmonisch ist.