Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Mittwoch 20.01.2010**

(1) Welche der folgenden Teilmengen von $\ell^2(\mathbb{N})$ sind kompakt? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) : |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \\ M_2 &= \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1 \right\} \\ M_3 &= \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) : |x_n| \leq \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

(2) Die Menge $A \subset c_0$ is genau dann präkompakt wenn es ein $x = (x_n) \in c_0$ gibt, so dass $|a_n| \leq x_n$ für alle $a = (a_n) \in A$ und $n \in \mathbb{N}$.

(3) Der Operator

$$T : \ell^p \to \ell^\infty,$$

$$Tx := x$$

ist nicht kompakt.

(4) Sei $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch $(Ax)_k = \frac{x_k}{k}$ gegeben. Zeigen Sie:

(i) $A \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$,

(ii) $R(A) = \{Ax : x \in \ell^\infty\}$ ist nicht abgeschlossen,

(iii) Es existiert $A^{-1} : R(A) \to \ell^\infty$ und $A^{-1} \notin \mathcal{L}(R(A), \ell^\infty)$,

(iv) $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ ist kompakt.