Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 6 **Abgabe Mittwoch 02.12.2015**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $U \subseteq A \subseteq X$ gegeben. Zeigen Sie: Es ist U genau dann offen im metrischen Raum (A, d), wenn eine im metrischen Raum (X, d) offene Menge $U' \subseteq X$ existiert, so dass $U' \cap A = U$.

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, (x_n) eine Folge in X. Zeigen Sie: Ist (x_n) eine Cauchy-Folge und gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge (x_n) gegen dieses x.

(3) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie ihren Rand:

$$[a, b] \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 < 1\}, \ a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

(4) Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume. Sei $f : X \to Y$ stetig. Zeigen sie, dass für jedes $h \in Y$ die Menge

$$N_f(h) := \{x \in X \mid f(x) = h\}$$

abgeschlossen ist.

Zusatzaufgaben

(1) Sei $e(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Zeigen Sie:

(a) $e(x, y)$ definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Eine Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ konvergiert bezüglich der euklidischen Metrik gegen $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn sie bezüglich e gegen dieses x konvergiert.

(c) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, e)$ ist nicht vollständig.