Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe: 19.12.2016**

(1) Finden Sie jeweils ein Beispiel reeller Folgen (x_n) und (y_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = \infty,$$

und

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 1$,

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \infty$,

(d) $(x_n \cdot y_n)$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

(2) Es sei $a > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := n^{\frac{5}{2}} \left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1} - \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{n+1} \right), \quad b_n := \frac{n!}{a^n} \text{ und } c_n := \frac{n!}{\binom{2n}{n}}.$$

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(3) (a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Zeigen Sie, dass $\sup A = \infty$ genau dann gilt, wenn eine Folge (x_n) in A existiert mit $x_n \to \infty$, für $n \to \infty$.

(b) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $x_n \to x$, für $n \to \infty$.

(ii) $(x - x_n)$ ist eine Nullfolge.

(iii) $(|x - x_n|)$ ist eine Nullfolge.

(4) Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der Körper der reellen Zahlen. Existieren auf der Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ Operationen $+_\infty$ und $\cdot_\infty$ mit den folgenden Eigenschaften?

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x +_\infty y = x + y$ und $x \cdot_\infty y = x \cdot y$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x +_\infty \infty = \infty$.
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, +_\infty, \cdot_\infty)$ ist ein Körper.