Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 11

Abgabe am 21.06.2017

Aufgabe 1. Gegeben sei der Raum

$$Y := \{(y, \sin(1/y)) \mid y > 0\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit der, durch die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$, induzierten Metrik d. Zeigen Sie, (Y, d) ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $p \in U$. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig in p, so ist f auch richtungsstetig in p.

(b) Ist f richtungsstetig in p, so ist f auch partiell stetig in p.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig differenzierbar für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Die Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren für alle Richtungen.

(c) f ist in $(0,0)$ nicht stetig.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

(b) Die partiellen Ableitungen sind bei $(0,0)$ nicht stetig.

Bemerkung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist also nur ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

Zusatzaufgabe 5. Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $d_D : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \{0,1\}$ die diskrete Metrik auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen Wörter über $\mathcal{A}$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{A}} = \{u : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\},$$

bezüglich der Metrik

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_D(x(i), y(i))}{2^i}$$

kompakt ist.