Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 7

Abgabe am 24.05.2017

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $d : [0,\pi) \times [0,\pi) \to [0,\infty)$ definiert durch

$$d(x,y) := |\sin(x-y)|$$

eine Metrik auf $[0,\pi)$ ist.

Tipp: Nutzen Sie Additionstheoreme.

Aufgabe 2. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $e : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, e(x,y) = d(x,y)/(1+d(x,y))$. Zeigen Sie:

(a) Es ist e eine Metrik.

(b) Zu beliebigen $r > 0$ existieren ρ, $\sigma > 0$ mit

$$U^e_\rho(x) \subset U^d_r(x), \qquad U^d_\sigma(x) \subset U^e_r(x)$$

für alle $x \in X$.

(c) Eine Folge ist eine Cauchy Folge bzgl. e genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge bzgl. d ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}^N, d_D)$ mit der diskreten Metrik

$$d_D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \{0,1\},\ d_D(x,y) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x = y \\ 1, \text{ falls } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Charakterisieren Sie alle bezüglich d_D konvergenten Folgen.

(b) Sei $N = 2$. Zeichnen Sie die offene und abgeschlossene Kugel um 0 jeweils mit Radius 1/2 und Radius 1.

Aufgabe 4. Sei M eine endliche Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y) \text{ für alle } x, y \in M.$$