Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 4 **Zur Besprechung in der Übung am 24.11.2015**

(1) (a) Seien E, F Banachräume und S, T dicht definierte Operatoren von E nach F. Zeigen Sie, dass $(S+T)^* \supset S^* + T^*$ gilt.

(b) Seien E, F, G Banachräume, S ein dicht definierter Operator von E nach F und T ein dicht definierter Operator von F nach G.
Zeigen Sie, dass $(TS)^* \supset S^*T^*$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass in (a) und (b) Gleichheit gilt, falls S und T beschränkt und überall definiert sind.

(2) Seien E und F normierte Räume. Zeigen Sie, dass $(E \times F)'$ und $E' \times F'$ isometrisch isomorph sind.

(3) Seien (X, μ) und (Y, ν) endliche Maßräume, $p, q \in [1, \infty)$ und $k\colon Y \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ messbar und beschränkt.
Zeigen Sie, dass durch

$$K\colon L^p(X, \mu) \longrightarrow L^q(Y, \nu),\ Kf(y) = \int_X k(y, x) f(x)\, d\mu(x)$$

ein beschränkter linearer Operator definiert wird. Berechnen Sie K^*.

(4) Sei $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Der Operator T in $\ell^2(\mathbb{N})$ sei definiert durch

$$D(T) = c_c,\ (Tx)_j = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(j,k)}.$$

Zeigen Sie, dass $D(T^*) = \{0\}$ gilt.