Hausaufgabenblatt 11

Abgabe am 16.01.2018

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0 \;\text{ und }\; \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \sum_{j=1}^{3} (\Delta F_j) e_j,$$

wobei $e_1, \dots, e_N$ die Standardeinheitsvektoren sind.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie den Satz von Gauß für die Kugel mit Radius $R > 0$ in $\mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x) = |x| x.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (z, y, z + 1)$ durch die Oberfläche des Kegels $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (die Normale weist nach außen) einmal mit und einmal ohne Verwendung des Satzes von Gauß.

Aufgabe 4. Sei $r > 0$. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma,$$

wobei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{1+x^2} - y \\ \cos(y^2) + x \\ \ln(1 + z^2) \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 5. Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand sei $u : \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von Ω zweimal stetig differenzierbar mit $u \not\equiv 0$, $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ und für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte

$$-\Delta u = \lambda u.$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$.