Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe am 07.11.2017

Aufgabe 1. Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert man die totale Variation $V_a^b(f) \in [0, \infty]$ durch

$$V_a^b(f) := \sup_Z \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen

$$Z := \{(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b) : n \in \mathbb{N}, x_j < x_{j+1}, j = 0, \ldots, n-1\}$$

von $[a, b]$ gebildet wird. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Für jede nichtfallende Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die totale Variation endlich, und es gilt $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$.

(b) Für f mit endlicher totaler Variation sind die Funktionen

$$f_\pm(x) = \frac{1}{2}(V_a^x(f) \pm f(x))$$

nicht fallend und f kann als Differenz zweier nichtfallender Funktionen dargestellt werden.

(c) Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t))$ ist genau dann rektifizierbar wenn für jede Komponenten γ_j, $j = 1, \ldots, N$, die totale Variation endlich ist.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ für alle $c \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 2. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Menge $BV[a, b]$ aller Funktionen auf $[a, b]$ von endlicher totaler Variation (vgl. Aufgabe 3) bildet mit den üblichen Operationen der punktweisen Skalarmultiplikation und Addition einen Vektorraum.

(b) Jede Funktion $f \in BV[a, b]$ ist beschränkt, und es gilt für $f, g \in BV[a, b]$

$$V_a^b(fg) \leq V_a^b(f)\|g\|_\infty + V_a^b(g)\|f\|_\infty,$$

insbesondere ist $BV[a, b]$ mit der punktweisen Multiplikation eine Algebra.

(c) Die Abbildung $\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_a^b(f)$ ist eine Norm auf $BV[a, b]$.

Aufgabe 3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene, sternförmige Menge. Zeigen Sie, dass U einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(p) := \left(\frac{\partial u}{\partial y}(p) \, , \, -\frac{\partial u}{\partial x}(p) \right), \qquad p \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gradientenfeld ist.

(b) Sei weiterhin $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Potential zu F. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

(c) Bestimmen Sie ein Potential zu der Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(p) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(p) \, , \, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p) \right), \qquad p \in \mathbb{R}^2,$$

Zusatzaufgabe 5. Was ist hier faul?