Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Pfingstblatt **Abgabe Freitag 01.06.2012**

(1) Sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $x \in M$ und $\emptyset \neq A \subset M$ sei

$$d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y),$$

und für $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(A) := \{x \in M : \ d(x,A) < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$,

(b) $\bar{A} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(A)$,

(c) Sei $\delta(x) := d(x,A)$. Zeigen Sie, dass $\delta : M \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig ist.

Bemerkung: Seien (M_i, d_i), $i = 1,2$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ heißt lipschitzstetig, falls $L > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in M_1$

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_1(x_1, x_2).$$

(2) Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei (F_n) ein Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von M mit der Eigenschaft $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ und diam $F_n \to 0$, wobei diam $A := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nichtleer ist. Gilt dies auch, falls man auf die Vollständigkeit verzichtet? Kann man die Voraussetzung diam $F_n \to 0$ fallenlassen?

(3) Es seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und $(E \times F, \|\cdot\|)$ mit $\|(x,y)\| := \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$ versehen. Zeigen Sie:

$$(E \times F, \|\cdot\|) \text{ vollständig } \Leftrightarrow (E, \|\cdot\|_E) \text{ und } (F, \|\cdot\|_F) \text{ vollständig.}$$

(4) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeigen Sie, dass die Abbildung $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ definiert durch

$$|\!|\!|[x]|\!|\!| := \inf_{y\in Y} \|x + y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenraum X/Y definiert.

(5) Zeigen Sie, dass $C([0,1])$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

nicht vollständig ist.

(6) Sei $\mathcal{P}$ der Raum aller reellwertigen Polyonome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ definieren wir $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(a) Ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ vollständig ?

(b) Untersuchen Sie die folgenden linearen Funktionale $\varphi_i : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und berechnen Sie gegebenefalls deren Norm:

$$\varphi_1(p) = \int_0^1 p(t)dt, \ \varphi_2(p) = p'(0), \ \varphi_3(p) = p'(1).$$

(c) Untersuchen Sie die die folgenden linearen Abbildungen $T_i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Norm:

$$(T_1 p)(t) = p(t+1), \ (T_2 p)(t) = \int_0^t p(s)ds.$$

(7) Sei $C^1([0,1])$ der Raum der auf dem Intervall $[0,1]$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen, ausgestattet mit der Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, wobei

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \, x \in [0,1]\}.$$

Welche der folgenden Normen sind aq̈uivalent zu $\|\cdot\|$?

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= |f(0)| + \|f'\|_\infty, \\
\|f\|_2 &= \max\left\{ \left| \int_0^1 f(t)dt \right|, \|f'\|_\infty \right\} \\
\|f\|_3 &= \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(8) Auf jedem unendlichdimensionalem normierten Raum existiert ein unstetiges lineares Funktional. Hinweis: Konstruieren Sie ein solches Funktional mittels (algebraischer) Basen.

(9) Finden Sie einen metrischen Raum (M,d) und eine folge stetiger Funktionen f_n, die punktweise gegen eine nirgends stetige Funktion f konvergieren.