Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe Dienstag 31.01.2012**

(1) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $d(x,y) = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2}$ die induzierte Metrik. (a) Dann sind

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty), \quad x \mapsto \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$$

und

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

stetig.
Sei $H = V$ nun ein Hilbertraum.

(b) Sei L ein Unterraum von H. Zeigen Sie, dass $L^\perp$ abgeschlossen ist.

(c) Sei $A \subset H$ eine nicht abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass wenigstens ein $x \in H$ existiert für das es keine beste Approximation gibt.

(2) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und (x_n) eine Cauchyfolge in V. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in V$ der Grenzwert $\phi(x) := \lim_{n\to\infty}\langle x, x_n\rangle$ existiert und die Abbildung $V \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \phi(x)$ linear und beschränkt ist, (d.h. $\phi(ax+y) = a\phi(x) + \phi(y)$ für $a \in \mathbb{C}$, $x, y \in V$ und $\sup_{x\in V, \langle x,x\rangle = 1} |\phi(x)| < \infty$).

(3) Sei f eine 2π-periodische auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$S_n f(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i(t-x)k}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

(b) Zeigen Sie für die Cesaro Mittel $C_N f := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f$

$$C_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+x)\frac{\sin^2(\frac{N+1}{2})t}{(N+1)\sin^2\frac{1}{2}t}dt.$$

(4) (a) Zeigen Sie, dass der Fejér Kern

$$K_N(t) := \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2})t}{(N+1)\sin^2 \frac{1}{2}t}$$

der Cesaro Mittel C_N aus Aufgabe (3) auf $[\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert für $N \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Cesaro Mittel $C_N f$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergieren (Vergleiche Blatt 8 Aufgabe (4).)

Zusatzaufgaben

(Z1) Sei H ein Hilbertraum.

(a) Sei e_j, $j \in \mathbb{N}$, ein ONS. Zeigen Sie, dass es für $x = e_1$ in $A = \{(1 + \frac{1}{j})e_j \mid j > 1\}$ keine beste Approximation gibt.

(b) Sei H endlich dimensional. Zeigen, Sie dass für jedes Element in H in jeder abgeschlossenen Teilmenge von H eine beste Approximation exitiert.

(c) Sei L ein nicht abgeschlossener Unterraum von H. Zeigen Sie, dass ein Element $x \in H$ existiert, welches keine Zerlegung der Art $x = x_L + x_\perp$ mit $x_L \in L$, $x_\perp \in L^\perp$ besitzt.

(Z2) Zeigen Sie, dass jeder nicht vollständige Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt einen abgeschlossenen Unterraum L enthält, so dass $L \neq V$ und $L^\perp = \{0\}$.

(Z3) Zeigen Sie, die Heisenbergsche Ungleichung

$$\|\mathrm{id} \cdot f\| \|\mathrm{id} \cdot (Ff)\| \geq \frac{1}{2}\|f\|^2, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

wobei $\|g\| = (\int_R |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) = x$ und F die Fouriertransformation ist.