Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Mittwoch 09.12.2009**

(1) Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{P}$. Dann ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ kein Banachraum.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Baire (Tipp: Die Mengen der Form $F_n = \text{lin}\{1, x, \ldots, x^n\}$ sind abgeschlossen. Warum?).

(2) Seien X und Y Banachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear. B sei partiell stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $y \mapsto B(x, y)$ stetig, und für alle $y \in Y$ ist $x \mapsto B(x, y)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch B stetig ist (Tipp: Banach-Steinhaus!).

(3) Auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X seien zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ erklärt und bezüglich beider Normen sei X vollständig. Ist dann $\|\cdot\|_2$ stärker als $\|\cdot\|_1$, so sind beide Normen äquivalent.

(4) Seien X, YBanachräume und $T : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) T ist injektiv und $T(X)$ abgeschlossen.

(ii) Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\| \geq C\|x\|$ für alle $x \in X$.

Zusatzaufgabe:

- Sei (f_n) eine Folge von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n(t) =: f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Es sei

$$\omega(t, \delta) := \sup\{|f(s_1) - f(s_2)| : |s_i - t| \leq \delta\},$$

$$\omega(t) := \inf_{\delta > 0} \omega(t, \delta)$$

und

$$U_\epsilon := \{t \in \mathbb{R} : \omega(t) < \epsilon\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $\epsilon > 0$ ist U_ϵ offen.

(b) Für alle $\epsilon > 0$ ist U_ϵ dicht.
Anleitung: Betrachten Sie $B_\epsilon := \mathbb{R} \setminus U_\epsilon$ und nehmen Sie an, dass B_ϵ ein abgeschlossenes Intervall J mit nichtleeren Inneren enthält. Sei

$$E_n = \bigcap_{i,j \geq n} \{t \in J : |f_i(t) - f_j(t)| \leq \frac{\epsilon}{3}\}.$$

Zeigen Sie, dass es ein n_0 gibt, so dass die Menge E_{n_0} ein nichttriviales Intervall I enthält. Dies führt zum Widerspruch $I \cap U_\epsilon \neq \emptyset$.

(c) Die Menge der Stetigkeitsstellen von f ist eine dichte G_δ-Menge.