

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

---

### Probeklausur

- (1) **6 Punkte**  
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y + e^{-x} \cos x, \quad y(0) = 1.$$

- (2) **6 Punkte**  
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \cdot \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

- (3) **10 Punkte**

- a.) Was ist ein erstes Integral? Welche charakteristische Eigenschaft hat es für die Lösung einer Differentialgleichung?  
b.) Geben Sie ein erstes Integral der folgenden Differentialgleichung an:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -8x \\ \dot{x} &= 4y \end{aligned}$$

- (4) **12 Punkte**

- a.) Was besagt der Peanosche Existenzsatz?  
b.) Geben Sie drei verschiedene charakteristische Eigenschaften der maximalen Lösung an!  
c.) Geben Sie ein  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  an, so dass die maximalen Lösungen von  $y' = f(x, y)$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  existieren.

(5)

**8 Punkte**

- a.) Sei  $A$  eine reelle  $2 \times 2$  Matrix mit reellen Eigenwerten  $\mu, \lambda$ . Skizzieren Sie das Vektorfeld von

$$y' = Ay$$

in Abhängigkeit von  $\mu$  und  $\lambda$ .

- b.) Zeigen Sie, dass die maximale Lösung für alle Zeiten existiert und eindeutig ist.

(6)

**8 Punkte**

- a.) Transformieren Sie das Anfangswertproblem

$$y''' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung.

- b.) Welche Dimension hat der Raum der Lösungen? Warum?