Sommersemester 2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsserie 2

Abgabe am 09.05.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = \operatorname{sgn}(y) \cdot |y|^{\frac{1}{2}}$.

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld.
b) Lösen Sie das allgemeine Anfangswertproblem zu $y(x_0) = y_0$.
c) Skizzieren Sie die Lösungsschar.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Zu $\alpha > 1$ sei das Anfangswertproblem $y' = |y|^{\alpha}$ mit $y(x_0) = y_0$ gegeben. Geben Sie die Lösungen auf dem größtmöglichen Intervall an. Vergleichen Sie mit dem Fall $\alpha = 1$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die Differentialgleichung $y' = f(y)$ gegeben. Außerdem sei eine Lösung $\varphi(x)$ auf $\mathbb{R}$ gegeben, für die der Grenzwert $l := \lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass dann auch die konstante Funktion $\psi(x) \equiv l$ eine Lösung ist.

Hinweis: Betrachten Sie in der Differentialgleichung $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$ den Grenzwert $x \to \infty$. Führen Sie dann die Annahmen $f(l) > 0$ beziehungsweise $f(l) < 0$ zu einem Widerspruch.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Geben Sie für die folgenden Anfangswertprobleme jeweils lokale Lösungen an:

a) $y' = \mathrm{e}^y \cdot \sin(x)$ mit $y(\frac{\pi}{2}) = -2$.
b) $y' = \frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{y\cdot(2x+x^2)}$ mit $y(2) = 1$.

Zusatzaufgabe **4 Punkte**

Für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die Differentialgleichung $y' = f(y)$ gegeben. Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton ist.