Sommersemester 2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 3 **Abgabe: Dientag, 26.05.2015**
Abgabe im Sekretariat der Analysis, Ernst-Abbe-Platz 2, 5. Etage

(1) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgendenden Differentialgleichungen.

a.) $y' = 1 - e^{-y^2}$.
b.) $y' = (y^2 + 1) \cdot x$.

(2) Geben Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ an.

a.) $y' = 2y + x^2 \cdot e^{2x}$.
b.) $y' = -2y + x$.

(3) Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y' = g(x) \cdot y + h(x)$$

auf dem Intervall I, wobei $g(x)$ und $h(x)$ stetig auf I sind. Ferner sei ein $z \in I$ gegeben und $\eta_k = \varphi_k(z)$ für $k = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass dann der Quotient

$$\frac{\varphi_3(x) - \varphi_2(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}$$

konstant ist für beliebige $x \in I$. Deuten Sie die Aussage geometrisch.

(4) Finden Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung.

$$y' = (x - y)^2 + 1.$$

Zusatzaufgabe:
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass die Bernoulli Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^p$$

zu jedem Anfangspunkt (x_0, y_0) mit $x_0 \in I$ und $y_0 > 0$ eine auf einer Umgebung von x_0 definierte Lösung besitzt.
Hinweis: Durch die Substitution $z := y^{1-p}$ wird die Bernoulli Differentialgleichung auf eine inhomogene lineare Differentialgleichung zurückgeführt.