Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018/2019 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 10 **Abgabe: 14.1.2019**

(1) Es sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator. Angenommen es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$, sodass $(A - \alpha)^{-1}$ selbstadjungiert ist. Beweisen Sie, dass dann auch A selbstadjungiert ist.

(2) Es A ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator und $\alpha, \beta \geq 0$. Beweisen Sie, dass dann auch $\alpha A + \beta A^2$ mit Definitionsbereich $D(A^2)$ nichtnegativ und selbstadjungiert ist. Es seien nun $s, t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie

$$\left(1 + \frac{t}{n} A\right)^{-n} \left(1 + \frac{s}{n} A\right)^{-n} = \left(1 + \frac{s+t}{n} A + \frac{st}{n^2} A^2\right)^{-n}.$$

(3) Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass die Abbildung $(0, \infty) \times L^2(\mu) \to L^2(\mu), (t, f) \mapsto T_t f$ stetig ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Halbgruppeneigenschaft von (T_t).